Durée : 4 heures

Baccalauréat C Antilles–Guyane septembre 1991

EXERCICE 1 **4 points**

Soit un losange ABCD de centre O, et tel que OB = 2OA.

1. Montrer que le barycentre I des points B, C, et D affectés respectivement des coefficients 2, -1 et 1 est le milieu du segment [AB].
2. Soit k un nombre réel.
   a. Déterminer et représenter l'ensemble E_1 des barycentres G des points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients k, 2, $k-1$ et $1-2k$.
   b. Préciser la valeur de k pour laquelle G est un point de la droite (AC).
3. Déterminer et représenter :
   a. l'ensemble E_2 des points M du plan tels que :

$$\left(\overrightarrow{M\text{A}}+\overrightarrow{M\text{C}}-2\overrightarrow{M\text{D}}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{M\text{B}}-\overrightarrow{M\text{C}}+\overrightarrow{M\text{D}}\right)=0.$$

   b. l'ensemble E_3 des points M du plan tels que :

$$M\text{A}^2+M\text{C}^2-2M\text{D}^2=-6\text{OA}^2.$$

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, on associe au point M d'affixe z, $z \neq -3\text{i}$, le point M' d'affixe z' tel que :

$$z'=\frac{z-1+\text{i}}{3-\text{i}z}.$$

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\left|z'\right|=2$.

PROBLÈME **12 points**

Partie I

1. Soit la fonction numérique g définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}.$$

   a. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. On ne demande pas de construire sa représentation graphique.
   b. Prouver que $g(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   c. Étudier la fonction g' sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
   En déduire que, pour tout x appartenant à $[1~;~+\infty[$, on a :

$$\left|g'(x)\right|\leqslant\frac{1}{4}.$$

2. Soit la fonction numérique f définie pour tout x réel positif par :

$$f(x) = 1 + \ln\left[\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}\right].$$

a. Étudier les variations de f.

Tracer avec précision la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ayant pour unité graphique 5 cm.

b. Prouver que, pour tout x réel positif, on a :

$$1 \leqslant f(x) \leqslant 1 + \ln 2 < 2.$$

c. En utilisant le 1., prouver que pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a :

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

d. Soit m un réel quelconque.

Déterminer graphiquement, en discutant selon les valeurs de m, le nombre de solutions positives de l'équation $f(x) = m$.

Pour $m = 1,5$, déterminer graphiquement les valeurs approchées des solutions à 10^{-1} près.

Partie II

On définit une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$U_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ U_{n+1} = f\left(U_n\right)$$

où f est la fonction définie dans la partie I.

1. Placer U_0 sur l'axe des abscisses du repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, puis par un procédé géométrique, représenter sur ce même axe U_1, U_2 et U_3.

2. Prouver que, quel que soit l'entier naturel non nul n, on a :

$$1 < U_n < 2.$$

3. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par :

$$h(x) = f(x) - x.$$

Montrer que h est une fonction décroissante. En déduire que l'équation
$f(x) = x$ a une seule solution λ comprise entre 1 et 2.
Donner une valeur approchée de λ à 10^{-2} près.

4. Prouver que pour tout entier n non nul, on a :

$$\left|U_{n+1} - \lambda\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|U_n - \lambda\right|$$

En déduire que $\left|U_n - \lambda\right| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.