Durée : 4 heures

Baccalauréat C Antilles–Guyane septembre 1993

EXERCICE 1 **4 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ ayant comme unité graphique 2 cm.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives -1 et i.
Soit f l'application de $P - \{\mathrm{A}\}$ dans P qui, à tout point M de $P - \{\mathrm{A}\}$ d'affixe z, associe le point $f(M)$ d'affixe Z telle que :

$$Z = \mathrm{i}\frac{z-\mathrm{i}}{z+1}.$$

(On rappelle que : $\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2k\pi$, k entier relatif).

1. **a.** Soit G le point d'affixe $(-1+\mathrm{i})$. Déterminer $f(G)$.
   b. Déterminer le point M de $P - \{\mathrm{A}\}$ tel que $f(M) = \mathrm{O}$.
2. Donner une interprétation géométrique des arguments de $(z - \mathrm{i})$ et de $(z+1)$.
   Préciser l'argument de i.
   En déduire une interprétation géométrique de l'argument de Z.
3. **a.** Déterminer et construire l'ensemble S_1 des points M de $P - \{\mathrm{A}\}$ dont les images par f ont pour affixe un nombre réel.
   b. Déterminer et construire l'ensemble S_2 des points M de $P - \{\mathrm{A}\}$ dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur.

N. B. - Les élèves qui suivent l'enseignement de spécialité utiliseront, pour traiter 3. a et 3.b, leurs connaissances sur le lieu des points M tels que
$\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},~\overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \alpha \quad \mod \pi$ ou $\mod 2\pi$.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

Une urne contient douze boules indiscernables au toucher : m boules blanches et n boules noires.

1. On tire successivement deux boules de l'urne, la boule tirée n'étant pas remise dans l'urne après le premier tirage.
   Déterminer les couples $(m,~n)$ pour que la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes soit égale à $\dfrac{16}{33}$.
2. On prend désormais $m = 8$ et $n = 4$.
   On tire successivement 3 boules de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.
   a. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche.
   b. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
   (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.)

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

On considère dans le plan un triangle ABC tel que : AB = 7, BC = 4 et AC = 5 (unité graphique = 1 cm).
Soit I le milieu de [BC].

1. Montrer que $\text{AI} = \sqrt{33}$.
2. **a.** Soit M un point du plan. Pour quelle valeur du réel m le vecteur $m\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{E}} + \overrightarrow{M\text{C}}$ est-il égal à un vecteur $\overrightarrow{U}$ indépendant du point M ? Déterminer alors le vecteur $\overrightarrow{U}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$.

   b. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$-2M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = -58.$$

3. Soit D le barycentre du système : $\{(\text{A},\ -1)\ ;\ (\text{B},\ 1)\ ;\ (\text{C},\ 1)\}$.

   a. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier la réponse.

   b. Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan tels que :

$$-M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = -25.$$

Problème — 12 points

On considère les fonctions dépendant d'un entier naturel n et définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \quad \text{et pour tout } n \geqslant 1 :\ f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2}.$$

On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Dans la partie A, on étudie la fonction f_0 et sa fonction dérivée.

Dans la partie B, on étudie la suite des nombres réels I_n.

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f_0.
   Construire la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal (unité graphique : 6 cm) en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
2. On note pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$: $f(x) = -f_0'(x)$.
   Calculer la fonction dérivée de f et montrer que f est décroissante sur $[0\,;\,1]$.
   En déduire que pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, on a : $\dfrac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Partie B

(On ne cherchera pas à calculer I_n.)

1. Calculer : $I_0 + I_1 + I_2$ et $I_0 + 2I_1$.
2. Étudier, pour tout entier n et pour x appartenant à $[0\,;\,1]$, le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout entier n et pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$.
   En déduire que : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Déterminer la limite de la suite (I_n).

4. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier n :

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

(f étant la fonction définie dans le A. 2.).

b. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A. 2., montrer que, pour tout entier n :

$$\frac{1}{3(n+2)} \leqslant \int_0^1 f(x)x^{n+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+2}.$$

puis que :

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

c. À partir de quel entier n_0 cet encadrement conduit-il à une valeur approchée au centième près de I_n ?

d. Déterminer alors la valeur approchée au centième près de I_n pour $n = n_0$.