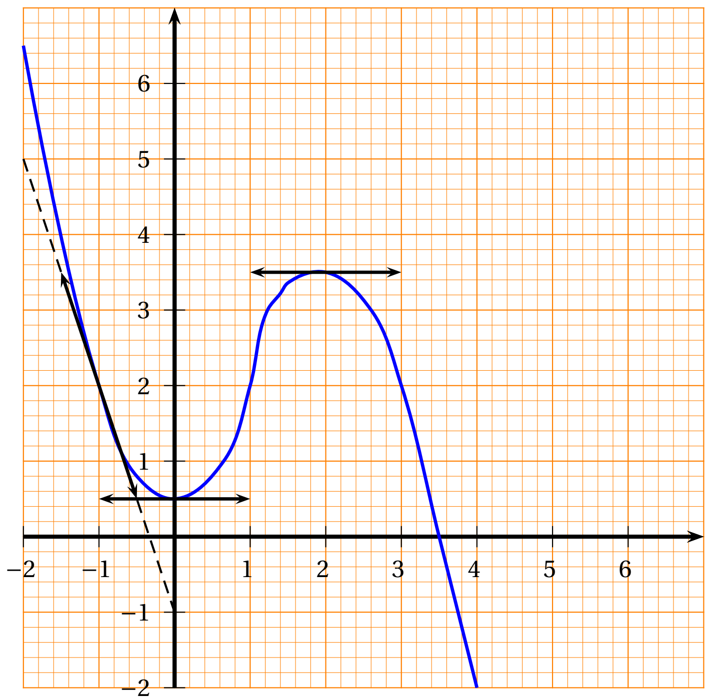
∽ Baccalauréat ES Antilles-Guyane juin 1995 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Toutes les réponses de cet exercice doivent être justifiées avec soin.
Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ *on considère la courbe ci-dessous, représentant une fonction définie et dérivable sur l'intervalle* $[-2\ ;\ 4]$.



1. **a.** Lire $f(0)$, $f(-1)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.
   b. Déterminer la dérivée logarithmique de f en -1 et en 2.
2. **a.** Déterminer graphiquement le signe de f et de sa dérivée f.
   b. Expliquer pourquoi la fonction $\ln f$ (c'est-à-dire logarithme népérien de f) est définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3,5[$.
3. Déterminer les variations de $\ln f$ par les deux méthodes suivantes :
   a. MÉTHODE 1 : Donner le signe de la dérivée de $\ln f$, et en déduire le tableau de variations de lnf.
   b. MÉTHODE 2 : Sachant que lnf est la composée de f suivie de ln (c'est-à-dire $\ln \circ f$), dresser les tableaux de variations des fonctions f et ln puis en déduire celui de $\ln f$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Cet exercice comporte deux questions indépendantes l'une de l'autre.

1. Un libraire vend des livres scientifiques, des livres de littérature et divers autres livres dans les proportions suivantes :
   — livres scientifiques : 20 % des ventes ;

— livres de littérature : 38 % des ventes ;
— divers autres livres 42 % des ventes.

Dans chacune de ces trois catégories, il y a des livres scolaires et des livres non scolaires.

Pour chaque livre vendu, le libraire remplit une fiche de renseignements. Il a constaté que :

— 80 % des livres scientifiques sont des livres scolaire ;
— 70 % des livres de littérature ne sont pas scolaires ;
— 50 % des divers autres livres ne sont pas scolaires.

Le libraire prend une fiche au hasard dans son fichier.

a. Quelle est la probabilité pour qu'elle corresponde à un livre scientifique et scolaire ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'elle corresponde à un livre non scolaire ?

2. Au cours d'une semaine promotionnelle, pour tout achat dans cette librairie d'un ou plusieurs livres, une enveloppe cachetée contenant un seul billet est remise à chaque client.

Si elle contient :

— un billet vert, le client gagne 100 francs ;
— un billet jaune, le client gagne 20 francs ;
— un billet blanc, le client ne gagne rien.

Pendant cette semaine, 1 000 personnes ont reçu une enveloppe et toutes les enveloppes ont été distribuées. Dans ces 1 000 enveloppes, il y a 10 billets verts 30 billets jaunes et les autres sont blancs.

Soit X la variable aléatoire correspondant, en francs, au montant du gain.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Déterminer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

Depuis qu'il est à la retraite, un homme tond sa pelouse tous les samedis, il recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.
Chaque semaine les matières stockées perdent, après décomposition ou prélèvement les trois quarts de leur volume.
Soit V_1, V_2, V_3 les volumes en litres stockés respectivement les premier, deuxième et troisième samedis après la tonte.
De manière générale, soit V_n le volume stocké le n-ième samedi après la tonte.

1. a. Montrer que $V_1 = 120$ litres, $V_2 = 150$ litres, $V_3 = 157,5$ litres.

b. Calculer les volumes V_4, V_5, V_6 exprimes en litres, stockes respectivement les quatrième, cinquième, sixième samedis après la tonte.

2. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.

3. On definit, pour tout $n \geqslant 1$, t_n par : $t_n = 160 - V_n$.

a. Montrer que (t_n) est la suite geometrique de premier terme $t_1 = 40$ et de raison $\frac{1}{4}$.

b. En deduire les expressions de t_n puis de V_n en fonction de n.

c. Determiner la limite de (t_n) puis celle de (V_n).

PROBLÈME — 10 points

Partie A

On considère les fonctions h et p définies sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad p(x) = x^2.$$

1. Tracer les courbes représentatives de h et p dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
2. Ces deux courbes se coupent en un point A d'abscisse α.
   Montrer que a est solution de l'équation $x^2\text{e}^x = 1$ et lire sur le graphique une valeur approchée de α à 0,1 près.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2\text{e}^x - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2}{\text{e}^x} - 1$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Étudier les variations de f et donner son tableau de variations.
3. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique comprise entre -1 et 0 et que cette solution est α.

   b. Donner un encadrement de αà 10^{-2} près.
4. Déterminer une équation de la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. Construire les tangentes et l'asymptote trouvées, ainsique $\mathcal{C}_f$.
6. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(x^2 + 2x + 2\right)\text{e}^{-x}$.

   a. Déterminer $g'(x)$.

   b. En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.