∽ Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 1999 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal, dont les unités sont 1 cm sur chaque axe. Construire ce repère sur votre copie en plaçant l'origine du repère en bas et à gauche.

Partie A

1. Représenter la droite (D_1) d'équation $3x + y = 30$, la droite (D_2) d'équation $x + 4y = 32$ et la droite (D_3) d'équation $x + y = 10$.
2. Déterminer au moyen d'un calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites (D_1) et (D_2).
3. Repérer graphiquement à l'aide d'une croix (« × ») les points du plan dont les coordonnées sont des nombres entiers positifs, x et y, qui vérifient de plus les conditions :

$$3x + y \leqslant 30 \quad ; \quad x + 4y \leqslant 32 \quad ; \quad x + y \geqslant 10.$$

Partie B

Un artisan fabrique deux sortes de poupées : des petites poupées et des grandes poupées.
Les petites poupées nécessitent 3 heures de travail et les grandes poupées une heure seulement. L'artisan, avec ses ouvriers, peut travailler 30 heures au plus par jour.
L'artisan ne dispose que de 32 mètres de tissu par jour. Il lui faut 1 mètre de tissu pour habiller une petite poupée et 4 mètres pour habiller une grande poupée.
On désigne par x le nombre de petites poupées et par y le nombre de grandes poupées produites dans une journée. L'artisan s'impose de fabriquer au moins 10 poupées par jour.
On admet que les contraintes de l'énoncé correspondent aux conditions suivantes :

x et y sont deux nombres entiers positifs ;	$3x + y \leqslant 30$;
$x \geqslant 0$;	$x + 4y \leqslant 32$;
$y \geqslant 0$;	$x + y \geqslant 10$.

Le nombre total de poupées produites dans une journée de travail est représenté par $S = x + y$.
L'artisan veut que sa production journalière S soit maximum.
Combien de poupées de chaque sorte doit-il fabriquer ?

EXERCICE 1 **4 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Une suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme U_0 strictement positif et par la relation de récurrence suivante :

$$U_{n+1} - U_n = -0,04U_n.$$

Partie A

1. En fonction de U_0, calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Démontrer que cette suite est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q que l'on déterminera.
3. Quel est son sens de variation ?

4. Exprimer U_n en fonction de U_0 et de n.

Partie B

Le 1er janvier 1997, la population d'une commune rurale était de 3 000personnes. On admet que cette population a diminué de 4 % par an.

1. Quelle a été la population de cette commune au 1er janvier 1999 ?
2. Quelle sera la population de cette commune au 1er janvier 2000 ?
3. À partir de quelle année la population chutera-t-elle à moins de 2 000 personnes ?

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne la moyenne y des maximums de tension artérielle en fonction de l'âge x d'une population donnée.

Âge x	36	42	48	54	60	66
Tension y	12	13,5	12,6	14,3	15,4	15

1. Représenter graphiquement le nuage de points $M(x ; y)$ dans un repère orthogonal. On prendra pour unités graphiques 0,5 cm pour 1 an en abscisse et 3 cm en ordonnée pour l'unité de tension artérielle, l'origine correspond au point 1 de coordonnées $(30 ; 10)$.
2. Dans cette partie, vous pourrez utiliser votre calculatrice.
   a. Calculer à 10^{-2} près le coefficient de corrélation entre x et y. On admet qu'un ajustement par la méthode des moindres carrés est justifié.
   b. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x et la représenter (les coefficients seront donnés à $0,001$ près).
   c. Une personne de 70 ans a une tension de 16,1. Quelle serait sa tension théorique en utilisant la droite de régression ? Comparer avec la tension réelle.
   d. Compléter le tableau de l'annexe en utilisant les valeurs de « a » et de « b » obtenues pour la droite de régression.
   Calculer la somme des « carrés » de la dernière colonne, associée à cet ajustement (calcul de la somme des résidus associés à cet ajustement).

Annexe :
À rendre avec la copie (après l'avoir complétée)
TABLEAU $a = \ldots\ldots\ b = \ldots\ldots$

x_i	y_i	$ax_i + b$	$y_i - (ax_i + b)$	$\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$
36	12			
42	13,5			
48	12,6			
54	14,3			
60	15,4			
66	15			

Somme des « carrés » de la dernière colonne : ....

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est l'étude d'une fonction et le calcul d'une aire liée à cette fonction.

Partie A

La courbe (Γ) ci-jointe (annexe 1) est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction g définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
Les points $\text{A}\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$ et $\text{B}\left(\text{e}; \dfrac{\text{e}^2}{2}\right)$ appartiennent à la courbe (Γ) et la tangente en A à (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer $g(1)$; $g(\text{e})$ et $g'(1)$.
2. Déterminer les réels a et b, sachant que la fonction g est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par une expression de la forme :

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + a + b\ln x.$$

3. Sachant que $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1 - \ln x$, retrouver au moyen d'un calcul, le sens de variation de g. (Le calcul des limites n'est pas demandé.)
En utilisant ce dernier résultat, étudier le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{2}.$$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
(On admet le résultat suivant : limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln x}{x} = 0$.)
2. Calculer la dérivée f' de f.
Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout réel positif x.
En déduire les variations de f.
3. Montrer que la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormal admet deux asymptotes que l'on précisera.
La courbe $(\mathcal{C})$ de f est donnée en annexe dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité 2 cm sur chaque axe.
4. On admet l'existence d'un réel α unique, appartenant à $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Que représente α pour la courbe $(\mathcal{C})$?
Placer sur la courbe $(\mathcal{C})$ le point I d'abscisse α.
Montrer que $\ln \alpha = -\dfrac{\alpha^2}{2}$. En déduire que $f'(\alpha) = \dfrac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$.

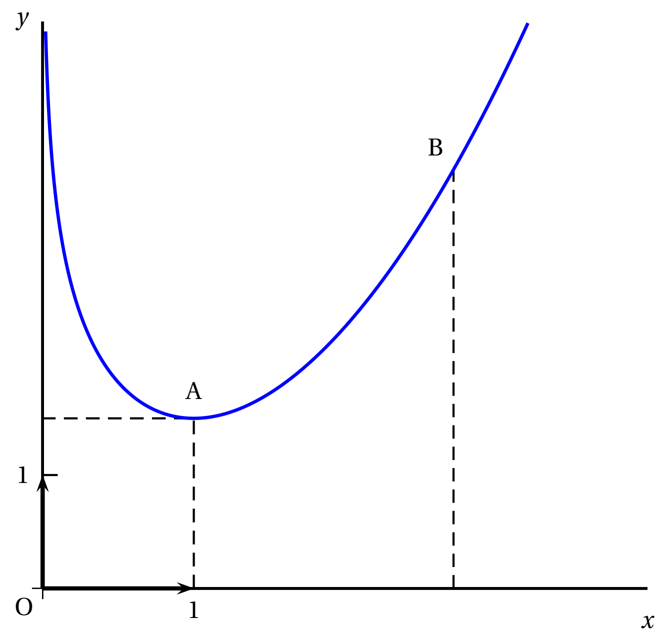
Partie C

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.
2. En déduire le calcul de $\text{J} = \displaystyle\int_1^t \left(\frac{\ln x}{x}\right) \text{d}x$.
3. Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine plan limité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.
Déterminer l'aire, en cm^2, de ce domaine.

Annexe 2

À rendre avec la copie (après l'avoir complétée)

Courbe (Γ)



Courbe ($\mathscr{C}$)