Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

À partir des productions réalisées pour l'année 2000, on veut comparer les résultats prévisibles de deux entreprises A et B jusqu'en 2015.

1. La production de l'entreprise A pour l'année 2000 est de 11 000 pièces. Chaque année, sa production augmente de 3 %.
   a. Quelle est sa production en 2001 ? en 2002 ? en 2015 ? (Donner les résultats arrondis à l'entier.)
   b. Quel est le pourcentage d'augmentation de la production de 2000 à 2015 ? (Résultat arrondi à 0,1 près.)
   c. Exprimer en fonction de n la production de l'entreprise A en l'an $(2000+n)$ (n entier $0 \leqslant n \leqslant 15$).
2. L'entreprise B a produit 9 000 pièces en 2000, et sa production augmente de 5 % par an.
   a. Quelle est sa production en 2015 ?
   b. Exprimer en fonction de n la production de l'entreprise B en l'an $(2000+n)$ (n entier $0 \leqslant n \leqslant 15$).
   c. Déterminer l'entier n tel que en l'an $2000+n$, la production de l'entreprise B dépasse pour la la première fois, la production de l'entreprise A.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule :

- si elle est rouge, il gagne 10 F ;
- Si elle est jaune, il perd 5 F ;
- Si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée.

Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 F, sinon il perd 4 F.

1. Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur est gagnant ».
3. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).
   a. Établir la loi de probabilité de la variable X.
   b. Calculer l'espérance de X.
4. Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La courbe de la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln x.$$

est donnée en annexe.

On considère la suite (u_n) à termes strictement positifs définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

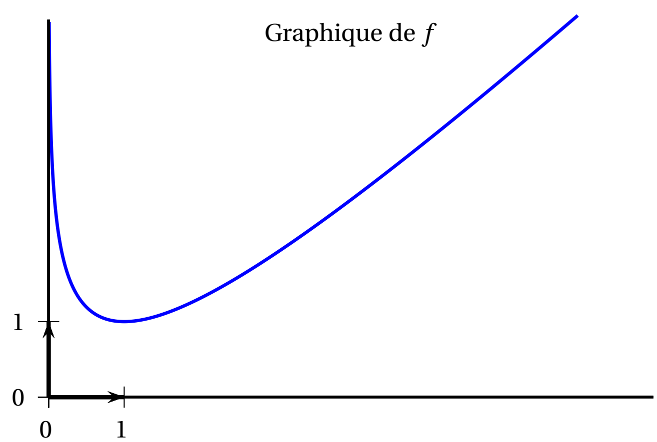
Partie I

1. Au moyen du graphique donné en annexe, déterminer le minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. Montrer que la suite (u_n) est monotone décroissante.

Partie II

1. Construire dans le repère de la courbe (C) donné en annexe la droite (D) d'équation $y = x$.
2. En vous aidant de la droite (D), représenter sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessous les cinq premiers termes de la suite (u_n).
3. Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la limite de la suite (u_n) ?

Annexe à rendre avec la copie



PROBLÈME **12 points**

Le but de ce problème est l'étude de deux fonctions qui modélisent les importations et les exportations de l'entreprise E.

Partie A

⋆ **Étude de fonctions**

Les fonctions f et g sont définies sur $[0\ ;\ \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{36}{8 + \mathrm{e}^{-x}} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\ln(x+1) + 2,5.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

1. **a.** Étudier les variations de f et de g.

   b. Calculer les limites de f et de g en $+\infty$.
2. Représenter graphiquement ces deux fonctions. On nommera leurs courbes respectivement $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$, et on se limitera aux valeurs de x entre 0 et 6.
3. Recopier et compléter le tableau suivant, avec des valeurs numériques arrondies à 10^{-2} près.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$				4,47			
$g(x)$		3,89					

Partie B

⋆ **Étude de la fonction $g - f$**

On pose $h = g - f$.
Le but de cette question est d'étudier le signe de $h'(x)$ afin d'établir le tableau des variations de h sur $[0 ; \infty[$.

1. Calculer la dérivée h' de h.
2. **a.** Vérifier que $e^x.h'(x) = \dfrac{2e^x}{x+1} - \dfrac{36}{(8+e^{-x})^2}$.

   b. On rappelle que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $e^x > x+1$.
   Établir l'inégalité $(8+e^{-x})^2 \geqslant 64$.
   En utilisant successivement ces deux résultats, établir que

$$e^x h'(x) \geqslant \frac{2e^x}{x+1} - \frac{9}{16} \quad \text{et que} \quad e^x h'(x) \geqslant 2 - \frac{9}{16}.$$

   c. Établir le tableau de variation de h.

   d. Montrer que $h(x)$ s'annule pour une seule valeur x_0 comprise entre 0 et 6.
   Déterminer un encadrement de x_0 de largeur 10^{-2}.

Partie C

⋆ **Application**

Notations : x désigne le temps en années. On pose $x = 0$ au 1er janvier 2000.
Pour l'entreprise E, $f(x)$ désigne le montant, en millions de francs, des achats pour l'année x et $g(x)$ désigne le montant, en millions de francs, de ses ventes.

1. Quel est le montant des achats et des ventes de cette entreprise à la fin de l'année 2000 ?
2. À partir d'une certaine date, les ventes l'emportent sur les achats.

   a. Déterminer l'année au cours de laquelle les ventes l'emportent sur les achats.

   b. Indiquer alors le rang de la semaine.