Baccalauréat ES Antilles juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Chaque question contient trois propositions repérées par les lettres A, B et C.
Le candidat doit indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse sans justification.
À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté, une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions; elles ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.
Les réponses seront transcrites dans le tableau fourni en annexe.

1. La figure 1. donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et la figure 2 celle d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

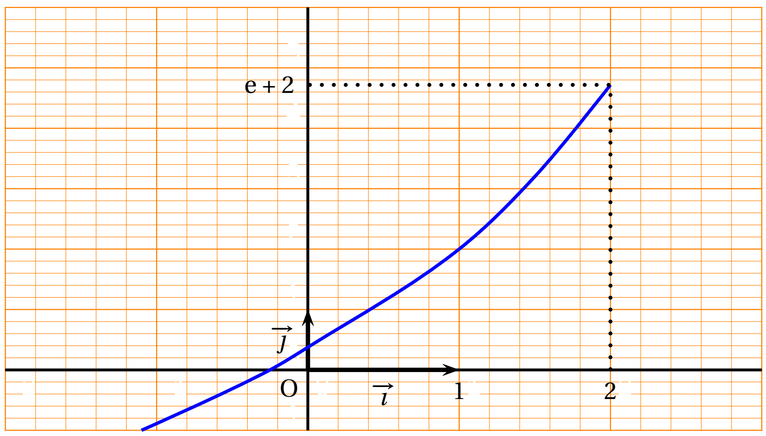

Figure 1

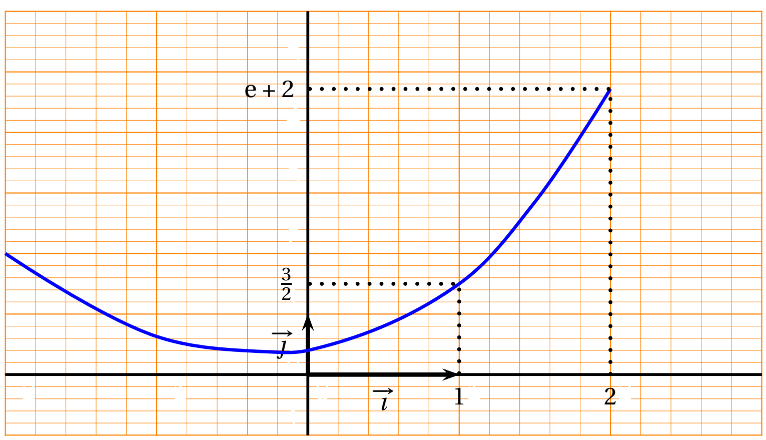

Figure 2

Quelle est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la représentation graphique de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$?

Proposition A : $\mathrm{e} + \dfrac{3}{4}$ **Proposition B :** $\mathrm{e} + \dfrac{1}{2}$ **Proposition C :** 1

2. La fonction k définie et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ est connue par son tableau de variations.

x	0		1		3		$+\infty$
$k(x)$		↗		↘		↗	$+\infty$

Quel est le tableau de variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \dfrac{1}{k(x)}$?

x	0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗		↘	0

x	0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗		↘	$-\infty$

x	0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		↗		↘		↗	0

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x - x + 1$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Proposition A : La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   Proposition B : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   Proposition C : La droite d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
4. En économie, le coût marginal est le coût occasionné par la production d'une unité supplémentaire, et on considère que le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total.
   Dans une entreprise, une étude a montré que le coût marginal $C_m(q)$ exprimé en milliers d'euro en fonction du nombre q d'articles fabriqués est donné par la relation :

$$C_m(q) = 3q^2 - 10q + \frac{2}{q} + 20.$$

Quel est le coût total C_T exprimé en milliers d'euros sachant qu'il est de 10 000 euros pour $q = 1$?

Proposition A : $C_r(q) = q^3 - 5q^2 + 2\ln q + 20q + 9984.$

Proposition B : $C_r(q) = q^3 - 5q^2 + 2\ln q + 20q - 6.$

Proposition C : $C_r(q) = 6q - 10 - \dfrac{2}{q^2}.$

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les épreuves de courses du 100 m, 200 m ou 400 m lors des meetings internationaux d'athlétisme. On s'intéresse au nombre de faux départs survenant lors de ces épreuves.
On rappelle qu'un faux départ est le démarrage d'un coureur avant le signal de départ donné par le starter, à la suite de quoi on doit donner un nouveau signal de départ.
Les statistiques des années précédentes ont permis d'établir les données suivantes :

- la probabilité qu'il y ait un faux départ au premier signal est de 0,2 ;
- quand il y a eu un faux départ au premier signal, la probabilité qu'il y ait de nouveau un faux départ au deuxième signal est de 0,05 ;
- il n'y a jamais de faux départ au troisième signal.

On admet que les départs sont indépendants les uns des autres.

1. Représenter ces données par un arbre de probabilités.
   On notera
   F_1 : l'évènement : « il y a un faux départ au premier signal » ;
   F_2 : l'évènement : « il y a un faux départ au deuxième signal ».
2. Montrer que la probabilité qu'il y a ait exactement un faux départ est de $0,19$.
3. Déterminer la loi de probabilités du nombre de faux départs donnés lors d'une épreuve quelconque.
   Justifier l'affirmation suivante : « dans 20 % des épreuves, il y au moins un faux départ ».
4. Lors d'un quart de finale au 200 m, on fait courir les athlètes en quatre séries indépendantes, soit quatre épreuves.
   Calculer la probabilité qu'il y ait exactement trois séries sans faux départ au premier signal lors de ce quart de finale.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le **score** d'un(e) étudiant(e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite :

- Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes.
- Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $n+1$-ième compétition est de $\frac{2}{5}$.
- Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$.

On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états.
On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.
On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n.
L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $(a_n \;\; b_n)$.

1. Représenter G et donner sa matrice.

2. Jamalia, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.

a. Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition.

b. Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.

3. Déterminer l'état stable du graphe G.

4. Julien a déjà de nombreuses compétitions universitaires dans les jambes.
Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

EXERCICE 3 — 6 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;\,5]$ par

$$f(x) = 9x - 15 - \mathrm{e}^{2-0,2x}.$$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur I. calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur I.
Dresser le tableau de variations de f sur I.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur I une solution unique notée α.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculer la valeur moyenne exacte de f sur I.

Partie B

Dans une entreprise, un économiste est chargé de modéliser le coût de production exprimé en **milliers d'euro de x centaines d'objets** fabriqués.
Il obtient une fonction C définie par

$$C(x) = 9x + 15 + \mathrm{e}^{2-0,2x}.$$

Chaque appareil est vendu 200 € mais seulement 90 % de la production est effectivement vendue.

1. Sachant que l'entreprise ne peut pas fabriquer plus de 500 appareils, à quel intervalle J doit appartenir x ?

2. **a.** Vérifier que la recette R en milliers d'euro, pour une production de x centaines d'objets, est donnée par : $R(x) = 18x$.

b. Montrer que le bénéfice, en milliers d'euro, obtenu lors de la production de x centaines d'objets est modélisé par la fonction B définie sur J par : $B(x) = 9x - 15 - \mathrm{e}^{2-0,2x}$.

3. Déduire de la **partie A** :

a. le nombre minimum d'appareils que l'usine doit fabriquer pour faire un bénéfice ;

b. la valeur moyenne du bénéfice, en milliers d'euro, réalisé pour les 500 premiers appareils fabriqués (donner un résultat arrondi à l'euro).

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un promoteur a construit en 1980 une résidence formée de plusieurs petites maisons de vacances dont le prix de vente cette année là était de 170 000 francs par maison. En 1985 le prix de revente était de 240 000 francs, en 1992 de 320 000 francs, en 2000 de 60 980 euros, et en 2003 de 69 000 euros.
On rappelle : 1 euro = 6,559 57 francs.

1. Donner le tableau de valeurs x_i et y_i, correspondant respectivement à l'année et au prix de vente d'une maison en euros (valeurs arrondies à l'euro si nécessaire).

2. Déterminer, à la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés, donnée sous la forme $y = ax + b$, a et b étant arrondis au centième ; le détail des calculs n'est pas demandé.

En déduire, par le calcul, une valeur approchée à l'euro près du prix de revente en 2005.

3. Soit t % le taux annuel moyen d'augmentation du prix de vente entre les années 1980 et 1985.

Exprimer le prix de revente en francs de la maison en 1985 en fonction de t.

En déduire que t est égal à $100\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{24}{17}\right)} - 1\right)$.

4. On admet qu'une valeur approchée de t obtenue à partir de la question précédente est 7,14.

Si l'on suppose que le taux moyen annuel d'augmentation est, à partir de 1985, de 7,14 %, calculer, en euro, le prix de revente en 2005.

Comparer avec le résultat trouvé à la question **2.**

Que pouvez-vous en déduire ?