Baccalauréat ES Antilles-Guyane septembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse. Une réponse exacte rapporte 0,5 *point. Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point, L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

QUESTIONS	**RÉPONSES**
1. L'ensemble des solutions de l'équation $\ln\left(x^2\right) = 2$ est ...	☐ $\{\text{e}\}$ ☐ $\{-2 ; 2\}$ ☐ $\{-\text{e} ; \text{e}\}$
2. $\exp(2x-6)$ est égal à ...	☐ $\text{e}^{2x} - \text{e}^6$ ☐ $\dfrac{2\text{e}^x}{\text{e}^6}$ ☐ $\left(\text{e}^{x-3}\right)^2$
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-1 < \text{e}^x < 9$ est ...	☐ $]0 ; \ln 9[$ ☐ $]-\infty ; 2\ln 3[$ ☐ $\left]\text{e}^{-1} ; \text{e}^9\right[$
4. Si $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\text{d}x = 1,9$ et $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x = -0,9$, alors $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\text{d}x = \ldots$	☐ 1 ☐ $-2,8$ ☐ $2,8$
5. La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)}$ sur $[0; 4]$ est égale à ...	☐ $\dfrac{1}{2}\ln 2$ ☐ $\dfrac{1}{4}\ln 5$ ☐ $\ln 4$
6. Laquelle de ces limites est exacte?	☐ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2}{\text{e}^x}\right) = -\infty$ ☐ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\text{e}^x = -\infty$ ☐ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\text{e}^x} = 1$
7. Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total. Si le coût marginal est $C_m(q) = \dfrac{6+6\ln q}{q}$ exprimé en milliers d'euros pour $q > 0$, alors le coût total exprimé en milliers d'euros est égal à	☐ $\text{C}_\text{T}(q) = 3\ln q(2+\ln q)$ ☐ $\text{C}_\text{T}(q) = \dfrac{-6\ln q}{q^2}$ ☐ $\text{C}_\text{T}(q) = 6\ln q + 3\ln\left(q^2\right)$
8. Si f est la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2\ln x - 3x + 5$, alors dans un repère du plan, une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 1 est ...	☐ $y = -x+2$ ☐ $y = -x+3$ ☐ $y = -3x-2$

EXERCICE 2 **6 points**

PARTIE A : UTILISATION D'UN GRAPHIQUE

La courbe $\mathscr{C}_g$ donnée en annexe (à rendre avec la copie) représente, dans un repère du plan, une partie de la représentation graphique de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{a}{\text{e}^{bx}+1}$ où a et b sont deux réels.
Soient A et B les points de coordonnées respectives A(0 ; 6) et B(4 ; 0).

1. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe au point A, déterminer $g(0)$, puis $g'(0)$.
2. Exprimer en fonction de a et b la dérivée $g'(x)$.
3. À l'aide des résultats précédents prouver que $a = 12$ et $b = 0,5$.

PARTIE B : ÉTUDE DE FONCTIONS

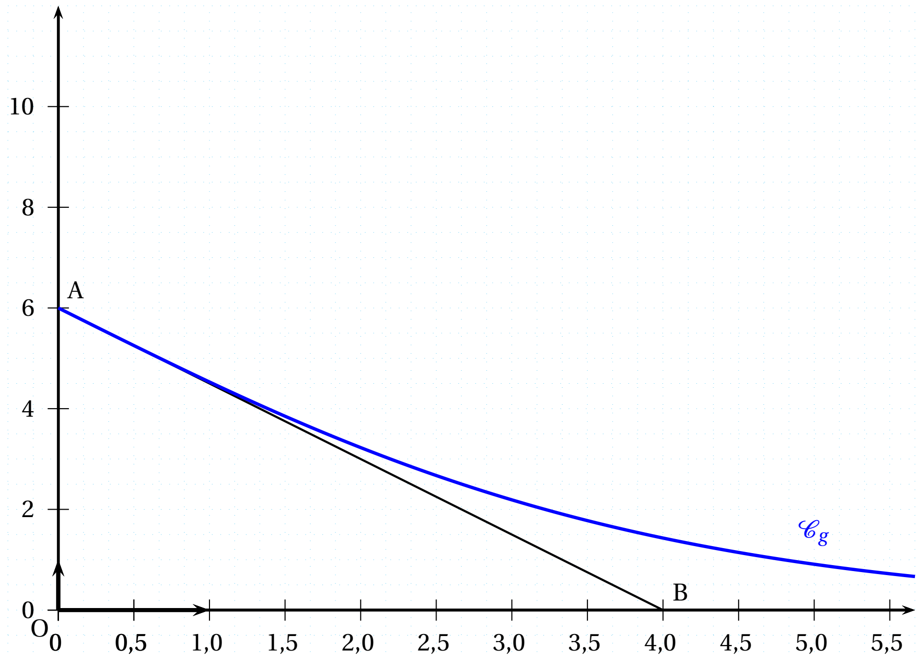
1. On donne $f(x) = \text{e}^{0,5x} - 1$pour tout réel x dans $[0 ; +\infty[$
   a. Calculer $f0)$, puis étudier la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variations de f, puis dresser son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$.
   c. Tracer, sur le graphique en annexe, la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
2. On rappelle que $g(x) = \dfrac{12}{\text{e}^{0,5x}+1}$ et on admet que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique p sur $[0 ; +\infty[$.
   a. Déterminer la valeur exacte de p. Contrôler graphiquement ce résultat.
   b. En déduire la valeur exacte de $n = f(p)$.
   c. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 13} f(x)\,\text{d}x$; que représente graphiquement cette intégrale ? Le préciser sur le graphique.

PARTIE C : INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE

Pour un prix de vente unitaire x, exprimé en centaines d'euros, $f(x)$ est le nombre d'objets, exprimé en centaines, proposés sur le marché et $g(x)$ est le nombre d'objets, exprimé en centaines, que les consommateurs sont prêts à acheter.
La fonction f est appelée fonction d'offre et la fonction g fonction de demande.
À l'aide des calculs réalisés dans la partie B, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le prix d'équilibre arrondi à 1 euro ?
2. On appelle rente du producteur le nombre $\text{R} = np - \displaystyle\int_0^p f(x)\,\text{d}x$ (n et p étant définis en B 2).
   Calculer la valeur exacte de R, puis son approximation décimale arrondie à la centaine d'euros.

Annexe



EXERCICE 3 **5 points**

Une bibliothécaire a constaté que

— Lorsqu'un étudiant choisit un livre, ce livre est une bande dessinée avec une probabilité égale à $0,3$ ou un roman une fois sur cinq ; sinon c'est un livre de cours.
— Lorsque l'étudiant choisit un roman, il prend aussi un magazine une fois sur deux.
— La probabilité qu'il emprunte à la fois une bande dessinée et un magazine est $0,24$.
— Lorsqu'il prend un livre de cours, il n'emprunte pas de magazine.

1. Un étudiant entre dans la bibliothèque. On notera B l'évènement « il emprunte une bande dessinée »,

R l'évènement « il emprunte un roman »,

C l'évènement « il emprunte un livre de cours »,

M l'évènement « il emprunte un magazine ».

a. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.

b. Calculer la probabilité qu'il choisisse un livre de cours.

c. Calculer la probabilité qu'il emprunte un magazine sachant qu'il a déjà pris une bande dessinée.

d. Calculer la probabilité qu'il reparte avec un magazine.

e. Quelle est la probabilité qu'il emprunte un roman sachant qu'il a pris un magazine ? Le résultat sera arrondi au millième.

2. Trois étudiants sont entrés en même temps et choisissent, de manière indépendante, des ouvrages. On note X le nombre total de magazines qu'ils empruntent. On suppose dans cette question que $p(M) = 0,34$ où M est l'évènement défini dans la question 1.

a. Déterminer la probabilité que les trois étudiants empruntent un magazine chacun.

b. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

c. Déterminer la loi de probabilité de X ; on présentera les résultats sous forme d'un tableau.
Les résultats seront arrondis au millième.

x_i	
$p(X = x_i)$	

d. Calculer l'espérance de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 4 **5 points**

Une entreprise a créé un site internet et a noté sa fréquentation chaque mois pendant six mois.

x_i rang du mois	1	2	3	4	5	6
y_i nombre de visiteurs	15	32	60	125		491

1. Quel est le pourcentage d'augmentation de la fréquence de visite de ce site entre les mois 2 et 3 ?
2. Quel est le nombre de visiteurs le cinquième mois sachant qu'il y a eu une moyenne de 157 personnes sur les six premiers mois ?
3. Représenter le nuage de points associé à la série $\left(x_i~;~y_i\right)$ dans un repère orthogonal du plan (unités graphiques : 2 cm pour un mois en abscisse et 2 cm pour 100 personnes en ordonnée).
4. On veut estimer le nombre de visiteurs au 10^e^ mois d'existence de ce site.

a. Un ajustement affine est-il indiqué ? Justifier votre réponse.

b. On note $z_i = \ln\left(\dfrac{y_i}{10}\right)$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous.
Les résultats seront arrondis au millième.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i					3,086	

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine de z en x obtenu, par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*),

d. En déduire l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = k \times \mathrm{e}^{px}$. Les réels k et p seront arrondis au centième

e. Combien de visiteurs peut-on espérer le 10^e^ mois en utilisant ce modèle ? Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Sur une population donnée, abonnée à deux opérateurs téléphoniques A et B, on considère que, chaque année, 40 % des abonnés à l'opérateur A le quitte pour l'opérateur B et 10 % des abonnés à l'opérateur B le quitte pour l'opérateur A. On néglige les nouveaux abonnés.
On suppose de plus qu'en 2005, 25 % de cette population est abonnée à l'opérateur A.

Partie A

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation. En déduire la matrice de transition, notée M.

2. On note :

- a_n la part des abonnés à l'opérateur A l'année $2005 + n$
- b_n la part des abonnés à l'opérateur B l'année $2005 + n$
- E_n la matrice $(a_n \quad b_n)$, correspondant à l'état probabiliste l'année $2005 + n$.

a. Préciser E_0.

b. Calculer E_1 en faisant apparaître vos calculs.

c. Déterminer la répartition prévisible de cette population en 2013.
On pourra utiliser la calculatrice et on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

d. Soit E la matrice $(a \quad b)$ où a et b sont deux réels positifs tels que $a + b = 1$.
Déterminer a et b tels que $\mathrm{E} = \mathrm{E} \times \mathrm{M}$. Interpréter ce résultat.

Partie B

1. Montrer que $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1$.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 0,2$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire l'expression de u_n puis de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?