ᔓ Baccalauréat ES Antilles-Guyane septembre 1997 ᔕ

Exercice 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x}$$

et f' sa fonction dérivée.

1. Dans $\mathbb{R}$, par le calcul, résoudre les équations ou inéquations suivantes :

   a. $f(x)$?0 ;

   b. $f(x) = -2$;

   c. $f(x) = -1$.

2. étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
En déduire l'équation d'une asymptote horizontale s'il y a lieu.

3. étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

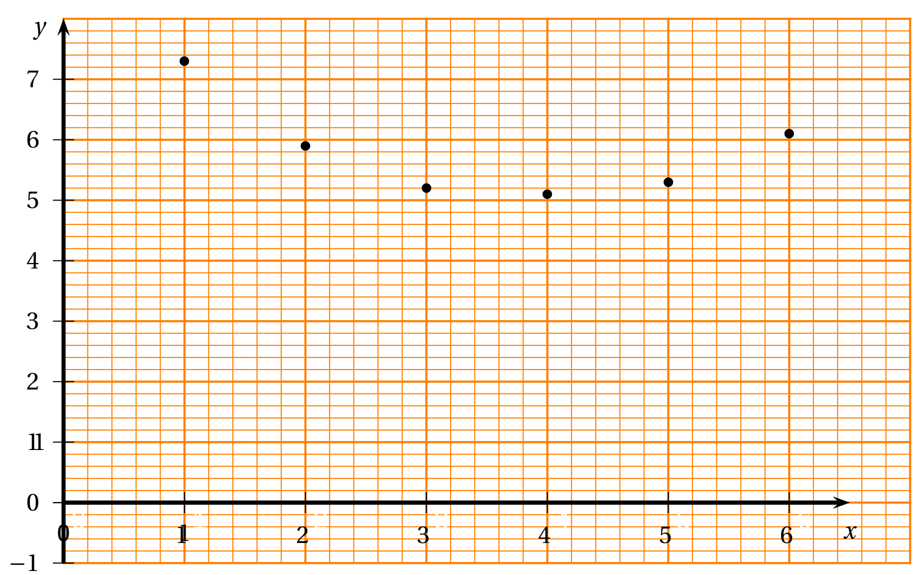
4. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de touristes (en dizaines de milliers) d'un département français entre 1991 et 1996.

Année	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de touristes y_i	7,3	5,9	5,2	5,1	5,3	6,1

Le nuage de points associé à cette série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ est donné sur le graphique suivant :



1. Le coefficient de corrélation linéaire entre x et y est environ égal à $-0,5$.
Est-ce en accord avec le graphique ? (justifier votre réponse).

2. Afin d'effectuer un ajustement à l'aide d'une parabole on effectue le changement de variable $t_i = (x_i - 4)^2$.
   Présenter dans un tableau la nouvelle série $\left(t_i~;~y_i\right)$ et calculer son coefficient de corrélation linéaire r à 10^{-3} près.
   Qu'en déduisez-vous ?
3. Donner l'équation de la droite de régression de y en t. On donnera les résultats à 10^{-2} près par excès.
4. Si la tendance ne change pas, effectuer une prévision pour 1998.
5. À l'aide de l'équation 3, trouver un ajustement de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

Exercice 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

À partir de l'année 1990, Pierre verse au le 1er janvier de chaque année 9 000 F sur un compte rémunéré à un taux annuel de 6 % À intérêts composés. Ainsi, chaque 1er janvier, on ajoute 9 000 F au capital déjà acquis.
On note u_n le capital disponible à partir du 1er janvier de l'année 1990 + n, ainsi $u_0 = 9\,000$.

1. Montrer que $u_1 = 18\,540$ et que $u_{n+1} = 1,06u_n + 9\,000$.
2. Soit la suite auxiliaire (v_n) telle que $v_n = u_n + 150\,000$.
   a. Calculer v_0 et v_1.
   b. Montrer que $v_{n+1} = 1,06v_n$; en déduire la nature de la suite (v_n).
   c. Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
3. À partir de quelle année Pierre disposera-t-il de plus de 200 000 F ? (On pourra utiliser la fonction logarithme népérien).

Problème **12 points**

On donne à la page suivante dans un repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les courbes représentatives (C_f), $(C_{f'})$, (C_g) pour $x > 0$ de trois fonctions f, f' et g.

Partie A : étude de f

La fonction f est définie Sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\text{e}^{x+2}}{(x+2)^2}.$$

1. étudier la limite de f en $+\infty$. (On pourra poser $X = x + 2$).
2. f' étant la fonction dérivée de f, montrer que $f'(x) = \dfrac{x\text{e}^{x+2}}{(x+2)^3}$.
3. Donner le tableau de variation de f.
4. Montrer que l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe $(C_{f'})$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$ est égale à $\dfrac{\text{e}^4}{144}\left(4\text{e}^2 - 9\right)$ en unités d'aire.

Partie B Coût marginal et bénéfice

Une entreprise constate que pour une quantité x d'un article A (en milliers d'articles) le coût total C_T (en milliers de francs) peut être évalué par $C_T(x) = f(x)$ pour x appartenant à $[1~;~5]$.
Le coût marginal C_m est alors défini pour tout x appartenant à $[1~;~5]$ par $C_m(x) = f'(x)$.
On note f'' la fonction dérivée de f' sur l'intervalle $[1~;~5]$.
On admettra que, $f''(x) = \dfrac{x^2 + 2}{(x+2)^4}\text{e}^{x+2}$

1. étudier le signe de f'' et en déduire le tableau de variations de f'.
2. **a.** Justifier que l'équation $f'(x) = 4$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1\,;5]$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) \geqslant 4$ sur l'intervalle $[1\,;5]$ puis donner sous forme d'un tableau le signe de $4 - f'(x)$.
4. Le prix de vente d'un article est 4 francs. Soit $B(x)$ le bénéfice correspondant À x milliers d'articles vendus. On a donc $B(x) = 4x - f(x)$.

   a. établir le tableau de variation de B.

   b. En déduire une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de x pour lequel le bénéfice est maximum.

Partie C Coût moyen

Si x est le nombre de milliers d'articles, on note g, la fonction définie sur $[1\,;5]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Cela représente donc le coût moyen d'un article. Les courbes (C_g) et $(C_{f'})$ sont sécantes en un point I.

1. Vérifier que I a pour abscisse 2. Graphiquement, que représente l'ordonnée de I pour la fonction g ?
2. Soit J le point de la courbe de (C_f) de même abscisse que I. Déterminer l'équation de la tangente (Δ) en J à (C_f) et vérifier que (Δ) passe par l'origine du repère.