Baccalauréat ES Antilles-Guyane septembre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Neuf amis, cinq garçons et quatre filles, décident de tirer au sort deux conducteurs, qui devront rester sobres durant une soirée.
Chacun écrit son nom sur un carton glissé ensuite dans une boîte.
L'un d'entre eux extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartons de la boîte.
On définit les évènements G_1, G_2, F_1 et F_2 par :

- G_1 : « Un garçon est désigné au premier tirage » ;
- G_2 : « Un garçon est désigné au deuxième tirage » ;
- F_1 : « Une fille est désignée au premier tirage » ;
- F_2 : « Une fille est désignée au deuxième tirage ».

1. **a.** Calculer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au deuxième tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu sur le premier carton.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement $G_1 \cap F_2$. La comparer à celle de l'évènement $G_2 \cap F_1$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait deux conductrices en fin de soirée.
3. Calculer la probabilité que le sort désigne une fille au deuxième tirage.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

EXERCICE 2 **4 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire (Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance) de 1988 à 1996.

Date	07/88	07/89	07/90	07/91	07/92	07/93	07/94	07/95	07/96
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Montant en francs (y_i)	28,76	29,91	31,28	32,66	34,06	34,83	35,56	36,98	37,91

Source : INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
   Le plan est rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm pour 1 an sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 franc sur l'axe des ordonnées.
   L'origine du repère correspond au point de coordonnées $(0 ; 28)$.

2. à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
   Pourquoi peut-on envisager un ajustement linéaire ?
3. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
   (Les coefficients seront donnés par des valeurs approchées à 10^{-2} près.)
   Tracer cette droite sur le graphique précédent.
   (Les coordonnées des points utilisés pour le tracé de la droite seront indiquées.)
4. Estimer, à l'aide de l'équation de la droite de régression et en faisant figurer sur la copie les étapes du calcul, le montant prévisible du SMIC en juillet 1997.
5. Quelle est, en pourcentage, l'erreur commise par rapport au montant réel du SMIC qui était de $39,93$ F en juillet 1997 ?

EXERCICE 3 **5 points**

Enseignement obligatoire

On considère une fonction f de la variable réelle x, dont on donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 2 cm sur chaque axe).

Partie A

En interprétant le tableau donné ci-dessus :

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Placer dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$:
   - **a.** l'asymptote horizontale (D) ;
   - **b.** l'asymptote verticale (D$'$) ;
   - **c.** le point A où la tangente à $(\mathscr{C})$ est horizontale.

Partie B

On donne maintenant l'expression de f :

$$f(x) = 1 + \frac{4}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

1. Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.
2. Au moyen de votre calculatrice remplir le tableau suivant (recopier ce tableau sur votre copie.)

x	-1	$-0,75$	$0,5$	2	3	4
$f(x)$						

3. Placer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère de la question **A. 2.**

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}u_n + 1. \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm, tracer la droite (D) d'équation $y = x$ et droite (D$'$) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

   En utilisant (D$'$) et (D), représenter sur ce graphique les points P, Q, R, S, T, U, V, de coordonnées respectives : $(u_0~;~0), (u_0~;~u_0), (u_0~;~u_1), (u_1~;~u_1), (u_1~;~u_2), (u_2~;~u_2)(u_2~;~u_3)$.

3. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $v_n = u_n - 2$.
   - **a.** Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   - **b.** Exprimer v_n en fonction de n, en déduire l'expression de u_n fonction de n.
   - **c.** Calculer la limite de u_n.

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est d'étudier une fonction, dont on connaît la représentation graphique, d'étudier la position de la courbe par rapport à l'une de ses tangentes et de calculer une aire.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\ln x - x.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (voir annexe).
Unités graphiques utilisées : 2 cm sur chaque axe.
Joindre cette annexe à votre copie.

A. Étude de la fonction *f*

1. étude des limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
   - **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$. (On donne $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$).
   - **b.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$. (On pourra mettre x en facteur).
2. Montrer que $f'(x) = 2\ln x + 1$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de l'axe des abscisses. Placer ce point A sur le graphique donné en annexe.

B. Position de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'une de ses tangentes

1. Établir qu'une équation de la droite (Δ), tangente en A à la courbe $(\mathscr{C})$ est : $y = 2x - 2\sqrt{\text{e}}$.
   Placer (Δ) sur le graphique donné en annexe.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - (2x - 22\sqrt{\text{e}}).$$

   - **a.** Calculer $g'(x)$.
   - **b.** À l'aide du tableau de variations de g montrer que $g(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
     En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite (Δ) sur $]0\,;\,+\infty[$.

C. Calcul d'une aire

Soit H la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$H(x) = x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right).$$

1. Calculer $H'(x)$.
2. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\sqrt{\text{e}}}^{\text{e}} \left(2x\ln x - 3x + 2\sqrt{\text{e}}\right)\,\text{d}x$.
3. Cette intégrale correspond au calcul de l'aire d'un domaine plan.

a. Colorier ce domaine sur la figure.

b. Donner, en cm^2, une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.

Annexe