Baccalauréat ES Antilles septembre 2003

EXERCICE 1 **9 points**

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est l'étude d'une fonction définie partiellement par sa représentation graphique ; on considère la fonction f définie sur par :

$$f(x) = ax + bx\ln(x) - 1,$$

où a et b sont deux réels non nuls.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;2]$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

Partie A

1. **a.** Déterminer graphiquement $f(1)$.

   b. En déduire que $a = 3$.
2. On sait que $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right) = -6\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} - 1$.

   En déduire la valeur de b.

   Dans la suite du problème la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 6x\ln(x) - 1.$$

Partie B

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   (On pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.)
2. **a.** On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$; montrer que pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 9 + 6\ln(x)$.

   b. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   b. Tracer en couleur la droite $\mathscr{D}$ sur la figure de l'annexe ainsi que la tangente au point d'abscisse $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

Partie C

Sur la figure de l'annexe, les graduations représentent 1 unité en ordonnée et 0,1 unité en abscisse.

1. Combien d'unités d'aire représente un carreau ?

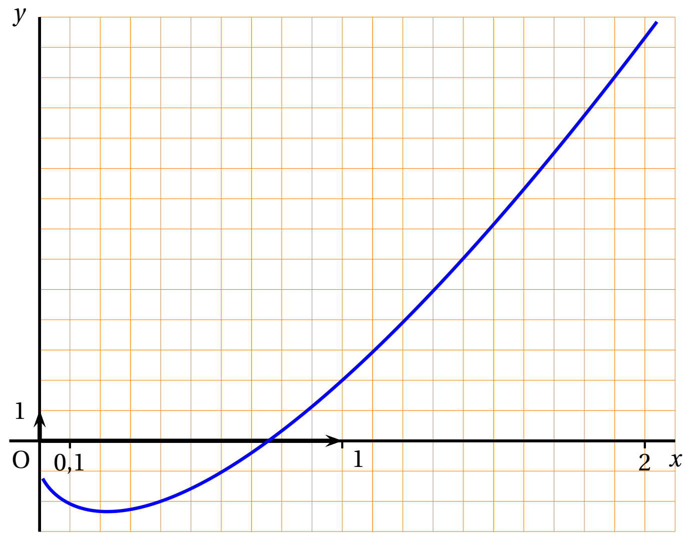
   En vous appuyant sur la figure de l'annexe, donner un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 2 de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 3x^2\ln(x).$$

   a. On admet que g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$; déterminer la dérivée g' de g.

   b. En déduire une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-1} près.



EXERCICE 2 **6 points**

Dans une fête foraine, Julie décide de jouer à un jeu dont chaque partie se déroule de la façon suivante :

- Elle tire un jeton dans une urne contenant 7 jetons rouges et 2 bleus.
- S'il est bleu elle gagne, sinon, sans remettre le premier jeton tiré, elle en tire un deuxième.
- S'il est bleu elle gagne, sinon, sans remettre les deux précédents, elle en tire un troisième.
- S'il est bleu elle gagne, sinon elle a perdu la partie.

1. Pour les calculs suivants, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

a. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
- A : « Julie gagne en un tirage exactement » ;
- B : « Julie gagne en deux tirages exactement » ;
- C : « Julie gagne en trois tirages exactement ».

b. Calculer la probabilité de gagner à ce jeu.

2. On suppose dans la suite de l'exercice qu'à chaque partie la probabilité de gagner est $\frac{7}{12}$.
À chaque partie gagnée, Julie gagne 1 ticket. Elle a remarqué un joli petit ourson en peluche qu'elle peut obtenir avec au moins 3 tickets.
Elle décide donc d'effectuer quatre parties consécutives.
On suppose que les parties sont indépendantes.
On appelle k le nombre de tickets gagnés par Julie lors des quatre parties et on notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A.

a. Montrer que $P(k=2) \approx 0,354$ à 10^{-3} près.

b. On donne, à 10^{-3} près :
$P(k=0) \approx 0,030$;
$P(k=1) \approx 0,169$;
$P(k=3) \approx 0,331$;
$P(k=4) \approx 0,116$.
Déterminer la probabilité pour que Julie reparte avec l'ourson à l'issue des quatre parties.

3. La mise pour quatre parties est de 5 €.
Les gains sont des bibelots dont la valeur, en fonction du nombre de tickets gagnés, est donnée dans le tableau ci-dessous :

Nombre de tickets	0	1	2	3	4
Valeur du gain (en €)	0	0,75	0,75	6	10

On appelle G le gain de Julie, c'est-à-dire ce qu'elle gagne compte tenu de ses mises.

a. Quelles sont les différentes valeurs prises par G?

b. Déterminer la loi de probabilité de G (on pourra utiliser les résultats donnés à la **question 2.**).

c. Calculer l'espérance mathématique de G et commenter le résultat obtenu.

EXERCICE 3 — 5 points

Enseignement obligatoire

La part des femmes élues maires de 1947 à 2001 est donnée en pourcentage par le tableau suivant :

Année	1947	1953	1959	1965	1971	1977	1983	1989	1995	2001
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Part y_i (%)	0,7	0,8	1	1,1	1,7	2,6	4	5,5	7,6	11,3

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthonormé (unités : 1 cm).
2. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).
   Tracer cette droite sur le graphique précédent.
3. En supposant que cet ajustement reste pertinent jusqu'en 2007, calculer une estimation de la part des femmes élues maires en 2007.
4. La forme du nuage de points laisse penser qu'un autre ajustement serait préférable. Pour cela, on pose $z = \ln y$, où ln est la fonction logarithme népérien.
   a. Faire un tableau faisant apparaître les valeurs x et les valeurs $z = \ln y$, arrondies au centième.
   b. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés, les coefficients étant arrondis au centième.
   c. En déduire l'ajustement $y = 0,54\mathrm{e}^{0,32}x$.
   d. En supposant que cet ajustement reste pertinent jusqu'en 2007, calculer une estimation de la part des femmes élues maires en 2007.

EXERCICE 3 — 5 points

Enseignement de spécialité

La figure donnée en annexe (à rendre avec la copie) représente une pyramide SABCD de sommet S.
On donne les coordonnées des points suivants dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$:
S(0 ; 0 ; 5) ; A(0 ; 2 ; 0) ; B(2 ; 0 ; 0) ; C(0 ; −2 ; 0) ; D(−2 ; 0 ; 0) ; M(0 ; 1 ; 0).

1. Démontrer que la base ABCD de la pyramide est un carré.
2. **a.** Sans aucun calcul, donner une équation du plan contenant les points A, B, C et D.
   b. Déterminer une équation du plan (ABS).
3. **a.** Vérifier que le plan (BCS) admet pour équation : $5x - 5y + 2z = 10$.
   b. Placer le point N(1 ; −1 ; 1). Est-il dans le plan (BCS) ?
4. **a.** Déterminer une équation du plan $\mathscr{R}$ parallèle au plan (BCS) passant par le point M.
   b. Dessiner les traces du plan $\mathscr{R}$ sur les plans $(x\mathrm{O}y)$, $(y\mathrm{O}z)$ et $(x\mathrm{O}z)$.

Annexe