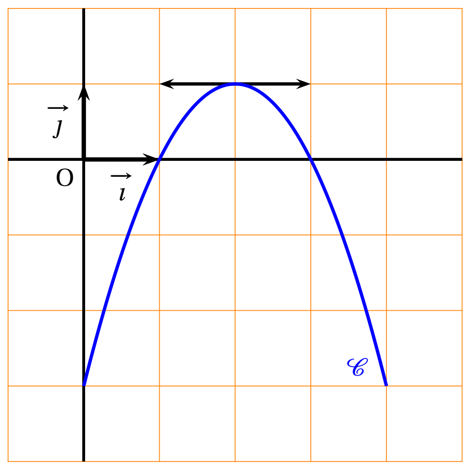
Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Soit u une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;4]$.
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique de cette fonction dans le repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Elle passe par les points de coordonnées respectives $(0\ ;\ -3)$, $(1\ ;\ 0)$, $(2\ ;\ 1)$, $(3\ ;\ 0)$ et $(4\ ;\ -3)$.
Elle admet, au point d'abscisse 2, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Sans justification
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction u, en précisant le signe de sa dérivée.
   b. Dresser le tableau donnant le signe de la fonction u sur $[0\,;4]$.



2. On considère la fonction $f = \ln \circ u$ (fonction composée de u suivie de ln).
   On admet que f est dérivable en tout point où elle est définie.
   En justifiant soigneusement votre choix, dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse
   a. f est définie sur $]0\ ;\ 4[$.
   b. f est positive ou nulle sur son ensemble de définition.
   c. $f'(2) = 0$.
   d. La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe représentative de f.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **5 points**

Pour fabriquer un appareil on utilise successivement et dans cet ordre deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 peut provoquer deux défauts d_1 et d_2. Un relevé statistique permet d'estimer que :

- 4 % des appareils présentent le défaut d_1 et lui seul;
- 2 % des appareils présentent le défaut d_2, et lui seul;
- 1 % des appareils présentent à la fois les défauts d_1 et d_2.

1. On prélève au hasard un appareil à la sortie de M_1. On note
   A l'évènement « l'appareil présente le défaut d_1 »;
   B l'évènement « l'appareil présente le défaut d_2 »;

   a. Calculer les probabilités des évènements A et B notées respectivement $p(A)$ et $p(B)$.
   Les évènements A et B sont-ils indépendants?

b. Soit D l'évènement « l'appareil présente au moins un défaut ».
Montrer que la probabilité de l'évènement D est égale à $0,07$.

c. Quelle est la probabilité pour que l'appareil ne présente aucun défaut.
À la sortie de la machine M_1 les appareils en cours de fabrication passent par la machine M_2 qui peut provoquer un défaut d_3 dans les conditions suivantes :

- 60 % des appareils ayant au moins un défaut en sortant de M_1 présentent le défaut d_3 ;
- 3 % des appareils sans défaut à la sortie de M_1 présentent le défaut d_3.

2. On prélève au hasard un appareil après les passages successifs dans les machines M_1 et M_2.
On note C l'évènement « l'appareil présente le défaut d_3 ».

a. Traduire les informations précédentes à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Quelle est la probabilité qu'un appareil fabriqué soit sans défaut ?

EXERCICE 2 SPÉCIALITÉ — 5 points

Lucien, fumeur impénitent, décide d'essayer de ne plus fumer.

S'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,3.
Par contre, s'il fume un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $0,9$.

On note F l'évènement « Lucien fume »et $\overline{F}$ l'évènement contraire.

1. Traduire ces informations à l'aide d'un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et $\overline{F}$.
On admet que la matrice M associée au graphe est $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'état probabiliste le n-ième jour est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$ où a_n désigne la probabilité que Lucien fume le n-ième jour et b_n la probabilité que Lucien ne fume pas le n-ième jour.

a. On suppose que le premier jour la probabilité que Lucien fume est 0,2.
Déterminer P_1.

b. Calculer M^2 et en déduire P_3.

c. Déterminer P_{n+1} en fonction de P_n et en déduire la probabilité que Lucien fume le $(n+1)$-ième jour en fonction de a_n et b_n.

d. On considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$ où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.
Déterminer a et b pour que $P = PM$.
En déduire la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 — 10 points

Une entreprise a lancé sur le marché un produit informatique en 1990.
Une étude statistique a permis d'établir les taux des ménages équipés entre 1993 et 2002.
Les résultats de cette étude sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Année	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Rang de l'année t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Taux de ménages équipés y_i	0,20	0,22	0,32	0,34	0,35	0,43	0,48	0,49	0,53	0,60

Cette entreprise doit prévoir une reconversion dès que 90 % des ménages seront équipés, c'est-à-dire dès que le taux des ménages équipés sera égal à 0,9.
Pour faire cette étude prévisionnelle, elle envisage deux types d'ajustement.

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
(Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 20 cm sur l'axe des ordonnées).
Les parties B *et* C *peuvent être traitées indépendamment de la partie* A.

Partie A - Ajustement affine

1. Représenter en couleur le nuage de points associé à la série statistique $\left(t_i,\ y_i\right)$ dans le repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en t par la méthode des moindres carrés. On ne demande pas le détail des calculs et les valeurs seront arrondies à 10^{-3}.
3. Représenter D dans le repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
4. Pourquoi cet ajustement ne permet-il pas d'effectuer des prévisions après l'année 2011 ?

Partie B - Ajustement logistique

On suppose que la situation est modélisée par la fonction f, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, telle que

$$f(t) = \frac{1}{1+4\mathrm{e}^{-0,2t}}.$$

Le nombre $f(t)$ donne en fonction du rang t de l'année le taux des menages équipés.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote notée Δ dont on donnera une équation.
2. Vérifier que, pour tout réel t de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = \dfrac{0,8\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(1+4\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$.

   En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.
3. Tracer $\mathscr{C}$ et Δ dans le repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
4. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(t) \geqslant 0,9$.

Partie C - Application

Dans cette partie, les pourcentages seront arrondis à l'unité.
On suppose que $f(t)$ est une approximation satisfaisante, au moins jusqu'en 2013, du taux des ménages équipés de ce produit informatique.
À l'aide de cette approximation et des résultats de la **partie B**, déterminer :

1. Le pourcentage des ménages équipés de ce produit informatique en 2008.
2. L'année à partir de laquelle 90 % des ménages seront équipés.