Baccalauréat ES Antilles-Guyane septembre 1996

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 0[$ par :

$$f(x) = ax + b + \ln(-2x)$$

où a et b,, sont deux réels donnés.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Le tableau ci-dessous représente les variations d'une fonction particulière f.

x	$-\infty$		$-1/2$		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

   a. En utilisant les données du tableau déterminer les valeurs a et b qui caractérisent cette fonction.

   b. Pour cette fonction particulière f, déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$.

   c. Montrer que, dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ -0,01\right]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 **6 points**

Enseignement obligatoire

Une société possède plusieurs usines réparties à travers le pays.
L'usine A emploie 1 000 personnes dont 70 sont affectées au service social, les autres étant des ouvriers ou des cadres.

1. Sachant qu'il y a deux fois plus d'ouvriers que de cadres dans A, trouver le nombre de personnes appartenant à chaque catégorie.
2. Par suite de problèmes dus à des baisses de charges, il est procédé à une restructuration de l'usine A : 10 % des cadres et 30 % des ouvriers sont mutés.
   Donner le nombre de cadres et le nombre d'ouvriers mutés.
3. Le directeur est ce jour-là sur les lieux, tout le personnel est présent, et le directeur a la même probabilité de rencontrer chaque employé.

   a. Quelle probabilité a-t-il de rencontrer une personne qui doit être mutée ?

   b. Il réunit toutes les personnes qui doivent être mutées et il donne la parole à l'une d'entre elles prise au hasard. Quelle probabilité a-t-il de s'adresser à un ouvrier ?
4. Le directeur reçoit par la suite l'ensemble de tous les ouvriers mutés et leur donne les informations suivantes : « Vos mutations seront effectuées dans quatre villes A, B, C et D, en fonction de vos compétences et une prime de déménagement vous sera accordée de la façon suivante :

Ville	A	B	C	D
Prime (en F)	20 000	15 000	12 000	10 000

Vous devez savoir que 62 personnes partiront pour la ville A, 31 pour la ville B, 18 pour la ville C et les autres pour la ville D. Une lettre vous informera de votre nouveau lieu de travail. »

On appelle X la variable aléatoire correspondant à la somme reçue en francs par chaque ouvrier muté.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X, en donner une interprétation.

EXERCICE 2 **6 points**

Enseignement de spécialité

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = -\frac{3}{4}U_n + \frac{11}{12} \text{ pour tout } n \geqslant 1 \text{ avec } U_1 = \frac{1}{2},$$

et la suite (V_n) définie par :

$$V_n = U_n - \frac{11}{21} \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

1. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n et en déduire que (V_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{4}$; préciser le premier terme.

2. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3. À une date donnée deux amis, Claire et Benoît décident de se téléphoner régulièrement. On désigne par (B_n) l'évènement : « Benoît téléphone à Claire le n-ième jour qui suit leur décision ». $p(B_n)$ est la probabilité de cet évènement.

La probabilité que Benoît téléphone à Claire le premier jour est $p(B_1) = \frac{1}{2}$.

Sachant que :

— si Benoît lui a téléphoné le n-ième jour, la probabilité pour qu'il l'appelle le lendemain est de $\frac{1}{6}$;

— par contre, si Benoît n'a pas appelé Claire le n-ième jour, la probabilité pour qu'il le fasse le $(n+1)$-ième jour, est de $\frac{11}{12}$;

a. énoncer $\overline{B_n}$ évènement contraire de B_n ;

b. montrer que $p(B_{n+1} \cap B_n) = \frac{1}{6}p(Bn)$ et que $p\left(B_{n+1} \cap \overline{B_n}\right) = \frac{11}{12}p(Bn)$;

c. en déduire que $p(B_{n+1}) = -\frac{3}{4}p(B_n) + \frac{11}{12}$.

4. En utilisant les questions 2. et 3., déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité pour que Benoît téléphone à Claire le 60$^{\text{e}}$ jour.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}$$

et on note $\left(\mathscr{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 10 cm.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$, on veut étudier la position de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ par rapport à la droite (D).
Pour cela :

a. Résoudre dans $[0\,;\,1]$, l'inéquation $\text{e}^{x^2-1} < 0$.
En déduire la position de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ par rapport à (D).

3. Construire $\left(\mathscr{C}_f\right)$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

4. **a.** Déterminer une primitive F de la fonction f sur $[0\,;\,1]$.

b. Montrer qu'en unité d'aire, l'aire A de la partie du plan limitée par la droite (D) et la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est égale à $\dfrac{1}{2\text{e}}$.

Partie B

Dans la commune Mateco, la répartition des réserves d'une banque en fonction du nombre de clients a fait l'objet d'une étude.
Les résultats sont donnés par la série statistique suivante :

X_i	0,01	0,40	0,60	0,70	0,90	1
Y_i	0,04	0,18	0,31	0,42	0,74	1

X_i fréquence cumulée croissante des effectifs
Y_i fréquence cumulée croissante des réserves
Interprétation du tableau : 60 % des clients ne détiennent que 31 % des réserves de la banque.

1. Sur le graphique dessiné dans la troisième question de la première partie, construire en pointillés et en partant du point O la ligne polygonale (Γ) obtenue en joignant successivement les points de coordonnées $(X_i~;~Y_i)$. (Γ) est appelée courbe de Lorentz.

2. Lire le pourcentage des réserves détenues par 65 % des clients.

3. Quel pourcentage des réserves se partagent les 20 % les plus riches ?