Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 1999

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Effectuer les calculs à l'aide de la calculatrice. Aucun détail n'est demandé. Le tableau suivant donne le PNB ainsi que le nombre d'hôpitaux pour 1 million d'habitants dans quelques pays européens.

Pays	A	B	C	D	E	F	G	H
PNB, x, en euro par habitant	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	26 230	28 910	31 910
Nombre y d'hôpitaux par million d'habitants	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 800	4 200	4 400

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x~;~y)$.
Unités : en abscisse : 1 cm pour 1 000 euros, en ordonnée : 1 cm pour 200 hôpitaux.
On prendra pour origine le point $M_0(5000~;~600)$.
On appelle G le point moyen de ce nuage.

2. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y (donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près).
On admet qu'un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié.

b. Donner une équation de la droite D de régression de y en x.

c. Tracer D dans le repère précédent (question **1.**).

d. Calculer les coordonnées de G et vérifier graphiquement que G appartient à D.

3. Un pays a un PNB de 23 400 euros. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux dans ce pays ?

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Un lycée propose trois options facultatives : arts plastiques, histoire des arts, musique. Un élève ne peut choisir qu'une seule de ces trois options.
Le groupe des élèves ayant fait l'un de ces choix à la rentrée 1997 se décompose de la façon suivante : 35 % en arts plastiques, 45 % en histoire des arts, 20 % en musique. À la rentrée 1998, 60 % des élèves en arts plastiques, 70 % en histoire des arts, 80 % en musique, conservent leur option.
Des animateurs, ne connaissant pas les élèves, organisent une réunion du groupe des élèves inscrits en 1997 dans une des options.
On note ainsi les évènements suivants :

A « L'élève est inscrit en arts plastiques à la rentrée 1997 ».

H « L'élève est inscrit en histoire des arts à la rentrée 1997 ».

M « L'élève est inscrit en musique à la rentrée 1997 ».

C « L'élève a conservé son option à la rentrée 1998 ».

1. Décrire la situation à l'aide d'un arbre de répartition.

2. On admet que l'animateur choisit au hasard un élève.

a. Calculer la probabilité de l'évènement « il était inscrit en arts plastiques en 1997 et a conservé cet enseignement en 1998 ».

b. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,613 5.

3. Un des animateurs souhaite connaître les motivations des élèves qui n'ont pas conservé leur option en 1998.
Il demande à ces élèves de lever la main et il en appelle un au hasard.
Calculer la probabilité de l'évènement « cet élève était inscrit en histoire de arts en 1997 ».

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Les questions I et II sont indépendantes.

I. 25 élèves d'une classe de seconde sont admis en première. Ils se répartissent de la façon suivante :

10 en série L;

9 en série ES;

6 en série S.

On choisit au hasard trois élèves de cette classe de seconde qui sont admis en classe de première.
Calculer la probabilité de l'évènement : « Les trois élèves sont admis en série ES ».

II. Dans l'établissement, sur 300 élèves de seconde admis en première, on a la répartition suivante :
— 75 élèves en série L;
— 120 élèves en série ES;
— 105 élèves en série S.

1. Parmi les élèves admis en série L, 60 % sont des filles. De même, 55 % des admis en série ES et 40 % des admis en série S sont des filles.
On choisit au hasard un élève admis en classe de première. On note ainsi les évènements suivants :
L : « L'élève est admis en série L »;
E : « L'élève est admis en série ES »;
S : « Un élève est admis en série S »;
F : « L'élève est une fille ».

a. Quelle est la probabilité de l'évènement suivant : « L'élève est une fille admise en série ES » ?

b. Calculer la probabilité de l'évènement F.

2. On prend au hasard le dossier d'un des élèves admis en première. Après utilisation, on le remet avec les autres. On effectue, au total, cinq fois cette opération.
Calculer la probabilité de l'évènement : « Trois dossiers exactement sont des dossiers de filles ».

PROBLÈME **10 points**

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\text{I} =]-\infty\,;\,+1[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x} + x + 1.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur I par

$$g(x) = x^2 - 2x + \ln(1-x).$$

1. Étudier la variation de g sur I (on ne demande pas le calcul des limites).
2. Calculer $g(0)$.
   Étudier le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\,;+1[$.

Partie B - Étude de la fonction *f*

1. **a.** Calculer la limite de f en $-\infty$.
   On admettra le résultat suivant : la limite de $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand x tend vers $-\infty$ vaut zéro.
   b. Calculer la limite de f en $+1$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. On admet que la dérivée f' de la fonction f vérifie l'égalité ci-dessous :
$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}.$$
   En déduire les variations de f.
   Dresser le tableau des variations de f sur I.
3. Soit la droite D d'équation $y = x+1$.
   a. Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D suivant les valeurs de x.
   b. Montrer que D est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ avec ses asymptotes dans le repère orthonormal défini dans l'introduction. (Unité graphique : 2 cm.)

Partie C - Calcul d'une aire

Soit la fonction H définie sur I par
$$H(x) = -\frac{1}{2}\,[\ln(1-x)]^2.$$

1. Vérifier que H est une primitive de la fonction h définie sur I par
$$h(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$
2. **a.** Donner la valeur exacte en unité d'aire, de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
   b. Donner une valeur approchée de cette aire en cm^2 à 10^{-2} près par défaut.
   c. Sur le graphique construit en **Partie B. 4.**, hachurer le domaine correspondant.