Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2001

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne le pourcentage de conscrits (jeunes gens ayant 18 ans dans l'année) qui sont en surpoids ou obèses.

Année	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pourcentage y_i	11,5	11,7	12,5	13,5	13,3	14,5	15,8	15,5	15,6	16,5

(Enquête du laboratoire espace, santé et territoire, université de Paris X – Nanterre)

Les résultats des calculs seront arrondis à 10^{-2} près.
Les coordonnées des points seront arrondies à 10^{-1} près.

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série statistique dans un repère orthonormé. L'origine du repère correspond au point de coordonnées $(0\,;\,10)$.
   G désigne le point moyen de ce nuage. Calculer ses coordonnées (x_0 et y_0).
   Placer ce point sur le graphique.
2. **a.** Trouver une équation de la droite (D) obtenue par la méthode des moindres carrés.
   b. Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent et vérifier que le point G appartient à cette droite.
3. **a.** Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre $\rho = \dfrac{\text{cov}(x\ ;\ y)}{\sigma_x\sigma_y}$.
   b. Calculer la somme S des carrés des résidus correspondant à cet ajustement.
   c. Vérifier que $\dfrac{\text{S}}{\sum\left(y_i - y_0\right)^2} = 1 - \rho$.
4. En utilisant les résultats précédents donner une estimation du pourcentage de jeunes gens en surpoids ou obèses ayant 18 ans en 2001.

Exercice 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Le système éducatif français est composé du 1^er^ degré (écoles maternelles et primaires) et du 2^e^ degré (collèges et lycées).
Le personnel assurant le fonctionnement est composé de personnel enseignant et de personnel non enseignant (administration, service...).
À la rentrée 1999, on a les informations suivantes :

- 64 % du personnel est enseignant
- 40 % du personnel est dans le 1^er^ degré
- 39 % du personnel enseignant est dans le 1^er^ degré.

On utilisera les notations suivantes pour désigner les évènements :

E : « être enseignant »
$\overline{E}$: « ne pas être enseignant »
$D1$: « être dans le 1^er^ degré »
$D2$: « être dans le 2^e^ degré »

On choisit au hasard une personne ; après justification, les résultats des calculs seront donnés sous forme décimale à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité pour un enseignant d'être dans le 1^er^ degré ?
2. Quelle est la probabilité pour un enseignant d'être dans le 2^e^ degré ?

3. Quelle est la probabilité pour une personne du système éducatif d'être enseignant du 1er degré ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être enseignante, sachant qu'elle est employée dans le 1er degré ?
5. Quelle est la probabilité pour une personne de ne pas être enseignante, sachant qu'elle est employée dans le 2e degré ?

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement de spécialité

Un couple dépose au premier janvier de l'an 2000, une somme de 5 000 euros sur un compte rémunéré au taux annuel de 6 %.
Par la suite, ce couple possède une capacité d'épargne annuelle de 3 000 euros, épargne versée tous les 1er janvier sur le compte précédent.
Les intérêts sont capitalisés au 31 décembre de chaque année.
On note S_n la somme dont le couple dispose au 1er janvier de l'année $(2000+n)$.

1. Calculer les valeurs de $S_0,\ S_1,\ S_2$.
2. Montrer que l'expression de S_{n+1}, en fonction de S_n est donnée par la relation :

$$S_{n+1}=1,06S_n+3000.$$

3. On pose $T_n=S_n+50000$.
   a. Montrer que (T_n) est une suite géométrique de raison 1,06.
   b. Exprimer T_n puis S_n en fonction de n.
   c. Au 1er janvier de quelle année le couple possédera-t-il une épargne supérieure à 50 000 euros ?

PROBLÈME **10 points**

Une entreprise fabrique un produit en quantité x.
Le coût total de ce produit est donné par

$$C_{\mathrm{T}}(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{9}{2}\ln(x+1)\quad\text{pour}\quad x\in[0\ ;\ 5].$$

Les coûts sont exprimés en millions d'euros et x est exprimée en milliers de tonnes.

Partie I - Étude d'une fonction auxiliaire f

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que l'on peut écrire

$$f'(x)=\frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}.$$

   Les détails du calcul de f' devront figurer sur la copie.

2. Établir le tableau de variations de f sur $[0;5]$.
3. En déduire que f s'annule sur $[0;5]$ pour une valeur unique α.
4. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α. (On précisera la méthode utilisée.)

5. Déduire des résultats précédents le signe de f sur $[0\,;\,5]$.

Partie II – Étude du coût moyen

La fonction coût moyen C_m est définie sur $[0\,;\,5]$ par :

$$C_m(x) = \frac{C_{\mathrm{T}}(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2} \times \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

1. Calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'on peut écrire $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la question **1** de la partie **I**.
   Les détails du calcul de C'_m devront figurer sur la copie.
2. Étudier le sens de variation de C_m sur $[0\,;\,5]$.
3. Pour quelle production, exprimée en tonnes, à une unité près, le coût moyen est-il minimal ? Quel est alors ce coût ?