∽ Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1981 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par

$$f(x) = \log\left(\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + 2\right).$$

1. Étudier la fonction f et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

   On montrera notamment que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]\log 2\ ;\ +\infty[$. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}. Calculer $g^{-1}(x)$.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

n étant un entier relatif quelconque, on considère les entiers relatifs a et b définis par

$$a = n^3 - 2n + 5 \quad ; \quad b = n + 1.$$

1. Montrer que P.G.C.D. $(a,\ b)$ = P.G.C.D. $(b,\ 6)$.
2. Pour quelles valeurs de n, a-t-on, P.G.C.D.$(a,\ b) = 3$?
3. Déterminer n pour que le nombre $\dfrac{a}{b}$ soit un entier relatif.

PROBLÈME **3 POINTS**

On appelle F l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que F, muni de l'addition des applications et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Si f est un élément de F, on note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

Partie A

ω étant un réel non nul, on considère le sous-ensemble E_ω de F des applications f qui vérifient

$$f'' = -\omega^2 f.$$

1. Démontrer que E_ω est un sous-espace vectoriel de F.
2. On considère les fonctions numériques ϵ_1 et ϵ_2 définies pour tout x réel par

   $$\epsilon_1(x) = \cos\omega x \quad \text{et} \quad \epsilon_2(x) = \sin\omega x.$$

   Montrer que $\{\epsilon_1,\ \epsilon_2\}$ est une partie libre de E_ω.
3. Montrer que, quel que soit l'élément f de F, il existe deux fonctions numériques u et v de la variable x, dérivables sur telles que pour tout x réel :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & u(x)\epsilon_1 + v(x)\epsilon_2(x) \\ f'(x) & = & u(x)\epsilon_1' + v(x)\epsilon_2'(x). \end{array}\right.$$
4. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que f soit élément de E_ω est que pour tout x réel

   $$u'(x) = v'(x) = 0.$$

   En déduire que $(\epsilon_1,\ \epsilon_2)$ est une base de E_ω.

5. Résoudre dans F l'équation $f + 9f'' = 0$. Montrer qu'il existe une solution unique telle que

$$f(0) = 3 \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n non nul, tout élément f de E_ω est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout x réel

$$f^{(n)}(x) = \omega^n f\left(x + \frac{n\pi}{2\omega}\right).$$

où $f^{(0)} = f$ et pour tout entier naturel n non nul $f^{(n)}$ est la fonction dérivée d'ordre n de f.

Partie B

Dans la suite du problème on donne à ω là valeur 1.
On appelle e_1, e_2, u_k les fonctions numériques de la variable réelle x définies par

$$e_1(x) = \cos x, \quad e_2(x) = \sin x, \quad u_{k(x)} = k,$$

où k est un réel strictement positif.
On considère l'espace vectoriel H engendré par e_1, e_2, u_k.

1. Montrer que $B_k = (e_1,\ e_2,\ u_k)$ est une base de H et que E_1 est un sous-espace vectoriel de H dont on donnera une équation dans la base B_k.

En déduire que tout élément g de H s'écrit de façon unique, $g = f + a$ où f est un élément de E_1 et a une fonction constante.

2. Montrer que l'on peut définir une application Φ de H × H dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément $\left(g_1,\ g_2\right)$ de H × H associe

$$\Phi\left(g_1,\ g_2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{0^{2\pi}} g_1(t)\cdot g_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exprimer $\Phi\left(g_1,\ g_2\right)$ en fonction des coordonnées $\left(\alpha_1\ ;\ \beta_1\ ;\ \gamma_1\right)$ et $\left(\alpha_2\ ;\ \beta_2\ ;\ \gamma_2\right)$ de g_1 et g_2 dans la base B_k.

3. Montrer que Φ est un produit scalaire.

Déterminer k pour que la base B_k soit orthonormée pour ce produit scalaire.

Partie C

On munit H de la multiplication scalaire ψ et on rapporte H à la base orthonormée $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

1. Soit Ψ l'application qui à tout élément g de H associe $\Psi(g) = g''$.

Montrer que Ψ est un endomorphisme de H.

On note I l'application identique dans H.

Montrer que Ψ est la composée de l'application $(-\mathrm{I})$ et d'une application que l'on caractérisera.

2. Pour tout entier naturel n, on considère l'application φ_n de H vers F, qui à tout élément g de H tel que $g = f + a$ associe la fonction

$$\varphi_n(g) = (-1)^{n+1}[f^{(n)} + a].$$

a. Montrer que φ_n est un endomorphisme de H et que

$$\varphi_{n+4} = \varphi_n.$$

b. En déduire, suivant l'entier n, l'expression analytique de φ_n dans la base $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

c. Déterminer suivant les valeurs de n, la nature de φ_n et préciser, dans chacun des cas, ses éléments remarquables.

d. Soit Θ_n la restriction de φ_n au plan vectoriel E_1. Montrer que l'ensemble $\{\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\}$ muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe commutatif.