

Durée : 4 heures

## ∞ Baccalauréat C juin 1985 Antilles–Guyane ∞

### EXERCICE 1

4 points

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (\ln x)^2.$$

- Étudier la fonction  $f$ ; tracer la courbe représentative ( $\Gamma$ ) de la fonction  $f$  dans le plan rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé.
- a. À l'aide d'une double intégration par parties, calculer :

$$\int_1^\lambda f(x) dx \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel supérieur à 1.}$$

- b. Déterminer l'aire de la portion du plan, ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  tels que :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

### EXERCICE 2

4 points

Dans un plan  $\mathcal{P}$ , on considère une droite  $\mathcal{D}$  et un point  $S$  non situé sur  $\mathcal{D}$ . Sur la droite  $\Delta$  perpendiculaire en  $S$  au plan  $\mathcal{P}$ , on considère un point  $A$  fixe distinct de  $S$ .  $B$  et  $C$  sont deux points variables de  $\mathcal{D}$  tels que les droites  $(SB)$  et  $(SC)$  soient perpendiculaires.

- Démontrer que la somme  $AB^2 + AC^2 - BC^2$  est constante.
- Soit  $H$  la projection orthogonale de  $S$  sur le plan  $(ABC)$ . Montrer que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .
- Dans le triangle  $ABC$ , les hauteurs issues de  $A$ ,  $B$  et  $C$  coupent les côtés opposés respectivement en  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$ .  
Montrer que  $A_1$  est un point fixe.  
Montrer que, dans le plan  $(ABC)$ ,  $B_1$  et  $C_1$  appartiennent au cercle  $\Gamma$  de diamètre  $[AH]$ , privé des points  $A$  et  $H$ .  
Réciproquement, montrer que, quel que soit le point  $B_0$  de  $\Gamma$ , on peut définir des points  $B$  et  $C$  sur  $\mathcal{D}$  tels que  $(BB_0)$  soit la hauteur issue de  $B$ , et que les droites  $(SB)$  et  $(SC)$  soient perpendiculaires.

### EXERCICE 2

4 points

On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble, noté  $\Sigma$ , des points de l'espace équidistants de deux droites  $D$  et  $D'$  non coplanaires et orthogonales.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

La droite  $D$  passe par le point  $A$  de coordonnées  $(0; 0; 1)$  et admet comme vecteur directeur  $\vec{u}$  tel que  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ .

La droite  $D'$  passe par le point  $B$  de coordonnées  $(0; 0; -1)$  et admet comme vecteur directeur  $\vec{v}$  tel que  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ .

1. Vérifier que  $D$  et  $D'$  sont orthogonales et non coplanaires. Montrer que le point  $O$  appartient à  $\Sigma$ .
2. Montrer qu'une représentation paramétrique de  $D$  est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Soit  $M$  un point de coordonnées  $(x; y; z)$ . Calculer la distance de  $M$  à la droite  $D$ .

3. Calculer de même la distance de  $M$  à la droite  $D'$ .
4. En déduire que  $M$  appartient à  $\Sigma$  si et seulement si on a :

$$xy + 2z = 0.$$

5. Déduire de cette relation :
  - a. Que les intersections de  $\Sigma$  avec des plans orthogonaux à la droite  $(AB)$  sont en général des hyperboles. Préciser le cas d'exception.
  - b. La nature des intersections de  $\Sigma$  avec des plans orthogonaux à l'axe  $(O; \vec{i})$  ou à l'axe  $(O; \vec{j})$ .