

∞ Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1988 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Expliciter, sous forme trigonométrique, les trois racines de chacune des deux équations :

a. $u^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

b. $u^3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2. Établir, pour tout réel α , l'égalité :

$$1 + e^\alpha = 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

3. Résoudre l'équation :

$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$$

(on pourra poser $(z-1)^3 = v$).

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère deux points fixes distincts A et B de l'espace \mathcal{E} et deux réels fixes a et b .

1. M étant un point quelconque de \mathcal{E} , quelle condition a et b doivent-ils vérifier pour que le barycentre M' des points pondérés (A, a) , (B, b) , $(M, 1)$ soit défini?

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose cette condition vérifiée et on note f l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} qui à M fait correspondre M' .

2. On suppose dans cette question $a + b = 0$. Exprimer

$\overrightarrow{AM'}$ en fonction de \overrightarrow{AM} . En déduire la nature géométrique de f .

3. On suppose dans cette question $a + b \neq 0$.

a. Montrer que f admet un unique point invariant I que l'on précisera.

b. Exprimer $\overrightarrow{IM'}$ en fonction de \overrightarrow{IM} et en déduire la nature géométrique de f .

PROBLÈME

12 POINTS

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y' - \frac{1}{n}y = 0 \tag{1}$$

2. On considère l'équation différentielle

$$y - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n}(n+1) \tag{2}$$

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction affine g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ax + b$ soit solution de (2).

3. a. Montrer que, pour que la fonction h définie sur \mathbb{R} soit solution de (2), il faut et il suffit que $h - g$ soit solution de (1).
 b. En déduire toutes les solutions de (2).
 c. Déterminer celle de ces solutions, f , vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}.$$

1. Étudier le signe de f'_n . En déduire le tableau de variations de f_n .
 On montrera en particulier que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.
 2. Montrer que la courbe \mathcal{C}_n représentant f_n admet une asymptote dont on précisera l'équation.
 Tracer \mathcal{C}_2 .
 3. Démontrer que sur l'intervalle $] -\infty ; 0[$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique que l'on notera x_n .

Partie C

On se propose dans cette partie de montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ admet une limite ℓ et de calculer ℓ .
 À cet effet on cherche à réaliser un encadrement de x_n .

1. On considère la fonction φ définie sur $]1 ; +\infty[$ par

$$\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln \frac{x-1}{x+1}.$$

- a. Déterminer le signe de φ' . En déduire le signe de φ .
 b. Montrer que $\varphi(n) < 0$ puis que $f_n(-2) < 0$.
 c. En déduire que $x_n > -2$.
 2. a. Établir l'égalité

$$f_n\left(2n \ln \frac{n}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1} \left[\frac{2n+1}{2n(n+1)} + \ln \frac{n}{n+1} \right].$$

- b. On considère la fonction Ψ définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$\Psi(x) = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln \frac{x}{x+1}.$$

Étudier le signe de Ψ' . En déduire le signe de Ψ , puis celui de

$$f_n\left(2n \ln \frac{n}{n+1}\right).$$

- c. Montrer que $x_n < 2n \ln \frac{n}{n+1}$.
 3. a. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2n \ln \frac{n}{n+1}\right)$. On pourra poser $u = \frac{1}{n}$.
 b. En déduire l'existence et la valeur de ℓ .