Durée : 4 heures

Baccalauréat C septembre 1981 Antilles–Guyane

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \text{Log}\,(1+x).$$

1. Étudier f et la représenter graphiquement dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est un réel strictement positif dont on déterminera la partie entière.
3. Calculer $\Phi(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$ où λ est un réel strictement supérieur à -1 (on pourra utiliser une intégration par parties).

EXERCICE 2

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on considère le système de deux équations à deux inconnues x et y

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+\overline{3}y &=& \overline{1}\\ \overline{3}x-y &=& m\end{array}\right.$$

où m est un élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1. Résoudre le système dans le cas où $m = \overline{1}$.
2. Discuter suivant les valeurs de m le nombre des solutions du système.

PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct R $= \left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Soit P le plan vectoriel euclidien associé.

Partie A

À tout point M de P de coordonnées $(x~;~y)$ dans R, on associe son affixe z où
$z = x + \text{i}y$.

1. Soient g et h les applications de P dans P qui, à tout point M d'affixe z, associent respectivement les points M' d'affixe z' e M'' d'affixe z'' définies par

$$z' = 3\text{i}z + 1, \quad \text{et} \quad z'' = (\text{i}-3)\overline{z} - \text{i}.$$

   Donner la nature et les éléments géométriques des applications g et h.
2. Soit f l'application de P dans P qui, à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $Z = X + \text{i}Y$ définie par : $Z = z' + z''$.
   Calculer X et Y en fonction de x et y.
   Montrer que f est une symétrie dont on précisera les éléments géométriques.

3. Soit H l'ensemble des points du plan P dont les deux coordonnées vérifient l'équation : $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$.
   Préciser la nature et les éléments remarquables de H.
   Déterminer une équation de l'ensemble H', image de H par f. Construire H et H'.

Partie B

On note Φ l'endomorphisme associé à f, $\mathcal{L}\left(\overrightarrow{\mathrm{P}}\right)$ l'ensemble des endomorphismes de $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ et I l'application identique de P.

1. Soit p l'élément de $\mathcal{L}\left(\overrightarrow{\mathrm{P}}\right)$ défini par : $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{I} - \Phi)$.
   Montrer que p est une projection vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. À tout réel non nul t, on associe l'élément Φ_t, de $\mathcal{L}\left(\overrightarrow{\mathrm{P}}\right)$ défini par $\Phi_t = 1 + t.p$.
   Pour quelle valeur t_0 de t l'endomorphisme Φ_t est-il involutif ? Comparer Φ et Φ_{t_0}.
   Pour quelles valeurs de t l'endomorphisme Φ_t est-il bijectif ?
   Calculer alors la matrice inverse de la matrice de Φ_t.

Partie C

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E et I l'application identique de E. Soit p une projection de E différente de l'application nulle, et Φ_t l'élément de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ défini pour tout réel t par : $\Phi_t = \mathrm{I} + t.p$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de t pour que Φ_t soit involutif.
2. Montrer que Φ^{-1} n'est pas une bijection.
3. Soit T l'ensemble des endomorphismes Φ_t lorsque t est un réel différent de -1.
   Montrer que T est un groupe commutatif pour la loi $\circ$ de composition des applications.

La partie **C** du problème peut être traitée indépendamment des parties **A** et **D**.