Baccalauréat ES Antilles-Guyane juin 1996

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on pourra utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice, le détail des calculs n'est pas exigé.

La société Dulog a mis au point un nouveau logiciel destiné essentiellement à des entreprises.
Une enquête a été effectuée par la société auprès de 300 entreprises déjà équipées d'un matériel apte à recevoir ce logiciel, afin de déterminer à quel prix chacune de ces entreprises accepterait d'acquérir ce nouveau logiciel. Elle a obtenu les résultats suivants :

x_i : prix proposé pour le nouveau logiciel (en milliers de francs)	y_i : nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix
32	80
27	125
24	145
18,5	200
15,5	225
12	250
11	265
8	280

1. Calculer le coefficient de corrélation de cette série statistique. (Résultat donné à 10^{-3} près). Interpréter ce résultat.
2. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression (D) de y en x (valeurs données à 10^{-3} près).
3. Dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm pour 2 000 francs en abscisses et 5 cm pour 100 entreprise en ordonnées, représenter : - le nuage de points associé à la série statistique ci-dessus ; - la droite (D).
4. **a.** À partir de ce graphique, déterminer le prix de vente maximum que doit fixer la société Dulog, pour que les 300 entreprises contactées acceptent d'acquérir ce logiciel. (On donnera un résultat à 500 francs près.)

   b. Retrouver le résultat précédent par le calcul.

EXERCICE 2 **6 points**
Enseignement obligatoire

Dans un magasin d'électro-ménager, un acheteur potentiel s'intéresse à un lave-linge et à un sèche-linge.
La probabilité pour qu'il achète le lave-linge est 0,6.
La probabilité pour qu'il achète le sèche-linge quand il a acheté le lave-linge est 0,7.
La probabilité pour qu'il achète le sèche-linge quand il n'a pa acheté le lave-linge est 0,1.
On désigne par L l'évènement : « le client achète le fave-linge » et par S l'évènement : « le client achète le sèche-linge ».

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants :

   a. « Le client n'achète pas le lave-linge ».

   b. « Le client n'achète pas le sèche-linge quand il n'a pas acheté le lave-linge ».
2. Montrer que la probabilité pour que le client n'achète ni le lave-linge ni le sèche-linge est $0,36$.
3. Le lave-linge coûte 4 000 F et le sèche-linge 3 200 F. On désigne par D la dépense effective du client.

a. Établir les valeurs possibles de la variable aléatoire D.

b. Déterminer la loi de probabilité de D.

c. Calculer l'espérance mathématique de D.

d. Le « service clientèle »du magasin sait qu'il se présente en moyenne chaque semaine 25 acheteurs potentiels pour ces deux appareils. Quel chiffre d'affaires hebdomadaire le magasin peut-il espérer réaliser ?

EXERCICE 2 **6 points**
Enseignement de spécialité

Deux constructeurs d'automobiles lancent simultanément deux modèles de voitures a et b.
Afin de promouvoir leur produit, ils font appel à des sociétés de publicité qui procèdent à des sondages. La campagne publicitaire dure plusieurs mois. Chaque mois on interroge les même individus.
On définit les évènements suivants :
A_n : « L'individu interrogé se déclare favorable au modèle a au n-ième mois ».
B_n : « L'individu interrogé se déclare favorable au modèle b au n-ième mois ».
On pose : p_n = probabilité de A_n ; q_n = probabilité de B_n.

1. On suppose qu'un individu interrogé est obligé de se déterminer soit pour le modèle a, soit pour le modèle b. Écrire alors une relation entre p_n et q_n.
2. On constate qu'un individu favorable au modèle a à un moment donné, garde une fois sur deux le même avis le mois suivant, alors qu'un individu favorable au modèle b garde le même avis sept fois sur dix le mois suivant.

   Déterminer dans ces conditions les probabilités conditionnelles suivantes :

   $p\left(B_{n+1}/A_n\right)$ et $p\left(B_{n+1}/B_n\right)$.
3. En utilisant la formule des probabilités totales et les résultat des questions précédentes, démontrer que :

   $$p\left(B_n \cap B_{n+1}\right) = 0,7 \times q_n \quad \text{et que} \quad p\left(A_n \cap B_{n+1}\right) = 0,5 \times p_n.$$

   En déduire que $p\left(B_{n+1}\right) = 0,7q_n + 0,5p_n$.

   Montrer que $q_{n+1} = 0,2q_n + 0,5$.
4. Démontrer que la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, de terme général : $u_n = q_n - 0,625$ est une suite géométrique de raison $0,2$.
5. Déterminer la limite de (u_n) puis celle de $\left(q_n\right)$; en déduire la limite de $\left(p_n\right)$.

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est d'étudier une fonction, d'en construire la représentation graphique, de donner une valeur approchée d'une solution d'une équation et de calculer une aire.
Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm en abscisses et 4cm en ordonnées).

1. **Étude de la fonction f et construction de la courbe (C)**

   a. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire ?

   Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $]0~;~+\infty[$ et étudier on signe.

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Résoudre dans $]0~;~+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. Déterminer le signe de $f(x)$.

e. Déterminer les équations des tangentes à la courbe (C) aux points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Construire ces tangentes.

f. Construire (C).

2. Résolution approchée d'une équation

a. Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ admet une solution unique α dans $[1~;~\text{e}]$

b. Déterminer graphiquement un encadrement de α.
Calculer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. Calcul d'aire

a. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x(2 - \ln x)^2.$$

b. Calculer l'aire (en cm^2) du domaine limité par l'axe des abscisses et l'arc de la courbe (C) correspondant aux $f(x)$ positifs.