∽ Baccalauréat S Antilles septembre 1996 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Pour les questions 1 *et* 2*, on donnera le résultat sous forme de fraction.*
M. Martin a 17 cravates : 12 cravates à motifs et 5 cravates unies. Il range toujours 10 cravates (7 à motifs et 3 unies) du côté gauche de son armoire et 7 cravates (5 à motifs et 2 unies) de l'autre côté.

1. M. Martin, devant partir en voyage pendant 3 jours, a besoin de 3 cravates.
Pour cela, il choisit 3 cravates simultanément et au hasard du côté gauche de son armoire. Soit X le nombre de cravates à motifs qu'il choisit :

a. Calculez la loi de probabilité de X.

b. Calculez $\mathrm{E}(X)$.

2. Lorsqu'il ne voyage pas, pour déterminer la cravate qu'il portera dans la journée, M. Martin utilise la méthode suivante : il choisit un côté de l'armoire au hasard, de façon équiprobable et il prend ensuite une cravate, toujours au hasard, sur le côté choisi.
On considère les évènements suivants :

G : « M. Martin choisit le côté gauche de l'armoire ».

D : « M. Martin choisit le côté droit de l'armoire »,

M : « M. Martin tire une cravate à motifs ».

U : « M. Martin tire une cravate unie ».

a. Calculez $p(M)$.

b. Calculez $p(G/M)$ [probabilité conditionnelle de G sachant que M est réalisé, notée aussi $p_M(G)$.

3. Tous les jours, pendant n jours, M. Martin effectue son choix en suivant la méthode indiquée en 2. Chaque soir, il remet la cravate utilisée pendant la journée à sa place.

a. Calculez en fonction de n la probabilité p_n pour qu'il ait pris au moins une cravate à motifs.

b. Calculez la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le candidat fera une figure sur laquelle il reportera les points A, B, C, D.

Dans le plan, rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note A, B, C les points d'affixes respectives

$$a = 3 + \mathrm{i}, \quad b = 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad c = 2 - 2\mathrm{i}.$$

1. Calculez $\dfrac{c-a}{b-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

2. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

a. Soit z l'affixe d'un point M et z' celle de son image M' par T ; exprimez z' en fonction de z.

b. Calculez l'affixe du point D image de B par T.

c. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifiez votre réponse.

3. **a.** Mettez c sous forme trigonométrique.

b. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, c^n est-il réel ?
Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, c^n est-il imaginaire pur ?

c. Calculez c^{1996}.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série sur une chaîne ; on estime que 99 % des pièces sont bonnes. Sur chaque pièce on effectue un test de qualité.
Lorsque la pièce est bonne, le test le confirme avec une probabilité de $0,995$ et déclare donc qu'elle est mauvaise avec une probabilité de $0,005$.
Lorsque la pièce est mauvaise, le test le confirme avec une probabilité de $0,990$ et déclare donc qu'elle est bonne avec une probabilité de $0,010$.
On note :
B : l'évènement « la pièce est bonne »,
$\overline{B}$: l'évènement « la pièce est mauvaise »,
T : l'évènement « le test indique que la pièce est bonne »,
$\overline{T}$: l'évènement « le test indique que la pièce est mauvaise ».
Les résultats des questions suivantes seront donnés à 10^{-3} près par défaut.

1. **a.** Déterminer la probabilité $p\left(\overline{B} \cap \overline{T}\right)$.

   b. Déterminer la probabilité $p\left(B \cap \overline{T}\right)$.

2. En déduire $p\left(\overline{T}\right)$, puis $p(T)$.

3. On décide d'écarter de la vente toute pièce dont le test indique qu'elle est mauvaise.

   a. Déterminer la probabilité pour qu'une pièce écartée de la vente soit bonne.

   b. On tire au hasard successivement et avec remise 20 pièces parmi celles écartées de la vente.
   Calculer la probabilité de tirer au moins une bonne pièce.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, l'unité graphique est 1,5 cm.
On considère l'ensemble E des points M du plan d'affixe $z = x + \text{i}y$ tels que :

$$9\text{i}z^2 - 9\text{i}\overline{z}^2 + 82z\overline{z} = 1\,600.$$

On se propose d'étudier la nature de E.

1. On considère la transformation T du plan associée à

$$z \longmapsto Z = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}} z.$$

   Précisez la nature de T et donnez ses éléments caractéristiques.

2. On pose $M' = T(M)$ et $\text{E}' = T(\text{E})$. On a $M' \in \text{E}'$ si et seulement si $M \in \text{E}$.

   a. Montrez que E$'$ est l'ensemble des points M' d'affixe $Z = X + \text{i}Y$ tels que :

$$-9Z^2 - 9\overline{Z}^2 + 82Z\overline{Z} = 1\,600.$$

   (on pourra remarquer que $z = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} Z$).

   b. Montrez que cette équation peut s'écrire :

$$16X^2 + 25Y^2 = 400.$$

c. En déduire que E′ est une conique dont on précisera la nature, l'excentricité, les foyers et les directrices.

3. **a.** Tracez E′ en faisant figurer les sommets, foyers et directrices.

b. Quelle est la nature de E ?

c. Tracez E sur la figure.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (0, i, j), l'unité graphique est 2 cm.

Partie A. Étude de deux fonctions

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et par $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g.

1. **a.** Calculez la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$?
Calculez la limite de f en $-\infty 0$.

b. Calculez $f'(x)$ et étudiez son signe.

c. Donnez le tableau de variations de f.

2. Étudiez g : limites, dérivée, tableau de variations.

3. **a.** Étudiez le signe de $f(x)-g(x)$ et en déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b. Montrez que les tangentes en A(0 ; 1) aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont orthogonales.

4. Tracez les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs tangentes au point A.

Partie B. Intégrale. Calcul d'aires

1. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction, qui à t associe $\left(at^2+bt+c\right)\mathrm{e}^{-t}$, soit une primitive de la fonction qui à t associe $\left(t^2+2t\right)\mathrm{e}^{-t}$.

2. α étant un réel **positif**,

a. Calculez l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ en centimètres carrés de la région du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$ (on pourra utiliser le résultat précédent).

b. Calculez $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \mathscr{A}(\alpha)$.

c. Calculez en centimètres carrés l'aire de la région du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, la droite d'équation $x = -2$ et l'axe des ordonnées.

Partie C. Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}$ privé de 0) par $u_n = \ln[f(n)]$.

1. Justifiez que la suite (u_n) est décroissante.

2. On désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).
$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a. Montrez que $u_n = -n+2\ln(n+1)$.

b. Démontrez que $S_n = 2\ln[(n+1)!] - \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.