∽ Baccalauréat Antilles–Guyane septembre 1967 ∾
Mathématiques élémentaires

I.

Soit l'équation

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

1. Calculer ses racines, z' et z'', dans le corps des nombres complexes.
   Représenter géométriquement ces racines. Déterminer leur module et leur argument.
   Les écrire sous la forme trigonométrique.
2. Mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$, puis sous la forme trigonométrique les deux nombres $\dfrac{z'}{z''}$ et $\dfrac{z''}{z'}$.
   Montrer que $\dfrac{z'}{z''} + \dfrac{z''}{z'}$ est un nombre réel.
   Vérifier à l'aide de l'équation.

II.

Déterminer les couples ordonnés $(x\,;\,y)$ de nombres entiers positifs vérifiant la relation

$$(1) \qquad 4x - 3y = 11.$$

Quelle est la valeur maximale, D, du p.g.c.d. des couples $(x\,;\,y)$ ainsi obtenus ?
Déterminer la forme générale des couples $(x\,;\,y)$ vérifiant la relation (1) et dont le p.g.c.d. est égal à D.

III.

On considère deux axes de coordonnées orthonormés $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ et les points A (+ 6 ; 0), B (+ 4 ; 0) et C (+9 , 0).
Un point m, dont l'abscisse est désignée par x, peut varier sur $x'\mathrm{O}x$; soit p sa puissance par rapport au cercle (S) de diamètre BC.

1. Calculer en fonction de x l'expression $z(x) = \dfrac{p}{m\mathrm{A}^2}$.
   Étude et représentation graphique, (Γ), de cette fonction z.
   En utilisant (Γ), discuter l'existence des racines de l'équation

   $$x^2 - 13x + 36 = \lambda(x-6)^2,$$

   où λ est un paramètre, et donner à leur sujet tous renseignements intéressants.
2. Soit maintenant M un point du plan, d'abscisse x et d'ordonnée y on désigne par m sa projection orthogonale sur Ox, par P sa puissance par rapport à (S).
   Calculer en fonction de x et y l'expression

   $$u(x\,;\,y) = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{MA}^2}.$$

   On étudiera les trois fonctions de y obtenues en fixant x respectivement égal à -2, $+6$, $+4$.

3. k désignant un nombre donné, inférieur ou égal à $\dfrac{25}{24}$ et différent de 1, il existe deux points de $x'\text{O}x$, m_0 et m_1 pour lesquels on a $z = k$.
Montrer que .la relation $m\text{M}^2 = -\overline{mm_0} \cdot \overline{mm_1}$ est équivalente à la relation $u = k$.
En déduire le lieu de points M tel que $\dfrac{\text{P}}{\text{MA}^2} = k$.
Que se passe-t-il pour $k = \dfrac{25}{24}$?.
Pourquoi a-t-on écarté les nombres supérieurs à $\dfrac{25}{24}$ et le nombre 1 ?