Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.
Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{100}$.
Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{10}$.
On appelle G l'évènement suivant : « la chaudière est sous garantie ».

1. Calculer la probabilité des évènement suivants :
   A : « la chaudière est garantie et est défectueuse » ;
   B : « la chaudière est défectueuse ».
2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\dfrac{1}{41}$.
3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, (unité graphique 2 cm).
On considère les points I et A d'affixe respectives 1 et -2. Le point K est le milieu du segment [IA].
On appelle $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [IA]. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{1+4\text{i}}{1-2\text{i}}$. Écrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
2. Soit D le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{KI}}, \overrightarrow{\text{KD}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ où k est un entier relatif et soit d l'affixe de D.
   a. Quel est le module de $d + \dfrac{1}{2}$? Donner un argument de $d + \dfrac{1}{2}$.
   b. En déduire que $d = \dfrac{1}{4} + 3\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
   c. Déterminer un réel a vérifiant l'égalité $\dfrac{1+2\text{i}a}{1-\text{i}a} = \dfrac{1}{4} + 3\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
3. Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \dfrac{1+2\text{i}x}{1-\text{i}x}$. On pose $Z = \dfrac{(m-1)}{(m+2)}$.
   Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM.

4. Soit N un point, différent de A du cercle $(\mathscr{C})$ et n son affixe.
Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \dfrac{1+2\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\mathrm{OI}},\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$ (unité graphique 4 cm)

1. On considère les points A, B , C , D et E d'affixes respectives :

$$Z_\mathrm{A} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},\ Z_\mathrm{B} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},\ Z_\mathrm{C} = -1,\ Z_\mathrm{D} = -\mathrm{i} \text{ et } Z_\mathrm{E} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

- **a.** Faire la figure
- **b.** Montrer que EA = ED et que EB = EC. Montrer que (OE) est la médiatrice du segment [AD] et du segment [BC]
- **c.** Déterminer les points K et L images respectives de A et de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$. Placer les points K et L sur la figure.

2. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $Z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z}$ où $\overline{Z}$ désigne le conjugué de Z.

- **a.** Justifier l'égalité $F = R \circ S$ où S est la réflexion ou symétrie axiale d'axe (OI) et R une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
- **b.** Montrer que F est une réflexion dont on précisera l'axe.

3. Soit G l'application qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M'' dont l'affixe Z'' définie par la formule $Z'' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z} + 1$.
Déterminer une application T telle que $G = T \circ F$. En déduire que G est un antidéplacement.

PROBLÈME **11 points**

Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Partie A - Étude de f_0 et de f_1

On appelle f_0 la fonction définie par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
On appelle $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ les courbes représentatives respectivement de f_0 et de f_1 dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 5 cm).

1. Déterminer la limite de f_0 en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f_0 et étudier son sens de variation.
3. Montrer que le point $\mathrm{I}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_0$.
4. Déterminer une équation de la tangente en I à $\mathscr{C}_0$.
5. Montrer que pour tout réel x, $f_1(-x) = f_0(x)$.
6. Par quelle transformation simple $\mathscr{C}_1$ est-elle l'image de $\mathscr{C}_0$? Construire $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

Partie B Calcul d'une aire

1. Montrer que pour tout réel x, $f_0(x) + f_1(x) = 1$.
2. Soit a un réel positif ou nul. Calculer $\displaystyle\int_0^a f_0(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_0^a f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire l'aire $\mathscr{A}(a)$ de la partie du plan définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & \leqslant x \leqslant & a \\ f_1(x) & \leqslant y \leqslant & 1 \end{array}\right.$$

4. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Partie C Étude d'une suite

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^n - 1}{\mathrm{e}^n}$.
3. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_{n+1} + u_n$.
4. Montrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$

$$\frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

5. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) puis la limite de (u_n).