∾ Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 1997 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, l'unité graphique est 1 cm.
On considère les points A, B , C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = (3\sqrt{3}-2)+\text{i}(3+2\sqrt{3}) \quad z_{\text{B}} = (-\sqrt{3}-1)+\text{i}(\sqrt{3}-1) \quad z_{\text{C}} = (1-4\sqrt{3})+\text{i}(-4-\sqrt{3})$$

1. On se propose de placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ à l'aide du compas. Pour cela on considère la rotation R de centre O et d'angle de mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$.
   a. Donner l'écriture complexe de R.
   b. Vérifier que R transforme le point A en le point A_0 d'affixe : $4-6\text{i}$.
   On admettra que R transforme les points B et C en les points B_0 et C_0 d'affixes respectives $2+2\text{i}$ et $-2+8\text{i}$.
   c. Placer les points A_0, B_0, C_0 puis, à l'aide du compas, les points A, B, C. (La construction de A sera justifiée).
2. **a.** Calculer $z_{\text{A}} - z_{\text{B}} + z_{\text{C}}$.
   b. En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés $\{(\text{A},\ 1),\ (\text{B},\ -1),\ (\text{C},\ 1)\}$.
3. Soit l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que :

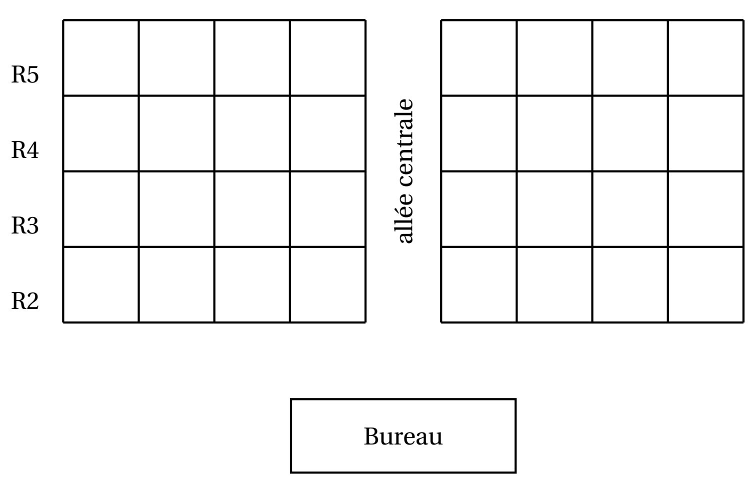
$$\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{A}} - 2\,\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\|$$

   a. Vérifier que B appartient à $\mathscr{C}$.
   b. Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathscr{C}$.
4. Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M du plan tels que :

$$2\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{A}} - 3\,\overrightarrow{M\text{B}}\right\|$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Voici le plan de la salle 308 du lycée Dupont.



Le premier jour de l'année scolaire, les élèves de la classe de TS1 sont invités par leur professeur principal à s'installer au hasard des places disponibles dans cette salle.
La classe de TS1 comporte 28 élèves.

1. **a.** Quel est le nombre de répartitions possibles des places inoccupées ?
   b. Calculer à 10^{-1} près, les probabilités des évènements suivants :
   A : « les huit places du rang R4 sont toutes occupées » ;
   B : « il y a autant d'élèves à gauche qu'à droite de l'allée centrale ».
2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme fractionnaire. Soit X la variable aléatoire « nombre de places inoccupées au rang R4 ».
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Calculer son espérance mathématique.

PROBLÈME **5 POINTS**

Partie I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.
2. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à $]0~;~+\infty[$.
4. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 5 cm. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g. Déduire de la partie I le sens de variation de g sur $]0~;~+\infty[$.
2. Vérifier que $g = h \circ k$ avec h et k les fonctions définies sur $]0~;~+\infty[$ par :

   $$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad k(x) = \frac{1}{x}.$$

   En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0.
3. Donner le tableau des variations de g sur $]0~;~+\infty[$.

Partie III

1. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient :

   $$1 \leqslant x \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

   En utilisant les résultats de la partie II,

a. Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

b. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

c. Justifier l'affirmation : « L'équation $\mathscr{A}(\lambda) = 5$ admet une solution unique notée λ_0 », puis donner un encadrement de λ_0 d'amplitude 10^{-2}.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Montrer, en remarquant que $\ln(u_n) = g(n)$, que :

a. La suite (u_n) est une suite croissante.

b. La suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.