∽ Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Un jeu de dominos est fabriqué avec les sept couleurs : *violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge*. Un domino se compose de deux cases portant chacune l'une des sept couleurs. Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino : c'est un double.

1. Montrer que le jeu comporte 28 dominos différents. Les 28 dominos, indiscernables au toucher, sont mis dans un sac.
2. On tire simultanément trois dominos du sac.

   Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux doubles parmi ces trois dominos ?
3. Dans cette question, on tire un seul domino. Calculer la probabilité des évènements suivants :

   a. J_2 : « Le jaune figure deux fois »

   b. J_1 : « Le jaune figure une seule fois »

   c. J : « Le jaune figure au moins une fois »
4. On effectue n tirages successifs d'un domino, en notant à chaque tirage la (ou les) couleur(s) obtenue(s) avant de remettre dans le sac le domino tiré et de procéder au tirage suivant ; les tirages sont indépendants.

   Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n, que J soit réalisé au moins une fois.

   Calculer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$$

1. **a.** Calculer $P(\text{i})$ et $P(-\text{i})$.

   b. Montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que :

   $$\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ P(z) = \left(z^2+1\right)Q(z)$$
2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. Placer dans ce repère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \text{i}$, $z_{\text{B}} = -\text{i}$, $z_{\text{C}} = -\sqrt{3}$ et $z_{\text{D}} = -\sqrt{3} - 2\text{i}$.

   Montrer que ces quatre points appartiennent au cercle de diamètre [CD].
2. Montrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme C en D. Calculer une valeur entière approchée à un degré près d'une mesure de l'angle de cette rotation.

3. Calculer, sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$$

Interpréter géométriquement le module et l'argument de ce rapport.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}.$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω,le rapport k et l'angle θ.
2. Soit M_0 le point d'affixe $1 + 4\sqrt{3} + 3i$.
   Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1} = f(M_n)$.
   a. En utilisant la première question, calculer ΩM_n en fonction de n.
      Placer le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3, M_4.
   b. À partir de quel rang n_0 a-t-on : « Pour tout $n \geqslant n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0,05$ » ?
3. a. Calculer M_0M_1.
   b. Pour tout entier naturel n, on note $d_n = M_nM_{n+1}$.
      Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c. On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. Calculer l_n en fonction de n et en déduire la limite de l_n en $+\infty$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'isobarycentre des points M_0, M_1, $M_2, \ldots, M_n$.
   a. Montrer que, pour tout $n > 0$, $\Omega G_n \leqslant \dfrac{16}{n+1}$.
   b. En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME **11 POINTS**

Partie A : étude de fonctions

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = (x+1)\,e^{-x} \quad f_2(x) = -xe^{-x} \quad f_3(x) = (x-1)\,e^{-x}$$

On appelle C_1, C_2, C_3 leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Les courbes C_2 et C_3 sont données sur le graphique ci-dessous.

1. Étude de la fonction f_1
   a. Calculer la dérivée f_1' de f_1 et étudier son signe. En déduire les variations de f_1.
   b. Déterminer les limites de f_1 en $+\infty$, en $-\infty$.
   c. Dresser le tableau de variation de f_1.

2. Étude graphique.
   a. Identifier sur la figure donnée les courbes C_2 et C_3 et placer sur le dessin le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   b. Étudier la position relative des courbes C_1 et C_3.
   c. Tracer C_1 dans le même repère que C_2 et C_3 sur la figure fournie.
3. Étude d'équations différentielles.
   a. Montrer que f_1 est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y' + y = \text{e}^{-x}$$

   b. Montrer que f_1 est aussi solution de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad y'' + 2y' + y = 0$$

   c. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_2). En déduire que f_2 et f_3 sont aussi des solutions de (E_2).
   d. Parmi les solutions de (E_2), quelles sont celles qui sont aussi solutions de (E_1) ?

Partie B : étude d'aires liées à C_1 et C_2

Pour n entier strictement positif, on appelle M_n le point de C_3 d'abscisse $n\ln 2$. On pose :

$$f(x) = f_1(x) - f_3(x)$$

pour tout x réel.

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire U_n du domaine plan limité par la courbe C_3, la courbe C_1 et les segments $[M_nP_n]$ et $[M_{n+1}P_{n+1}]$ pour $n > 0$. P_n et P_{n+1} sont les projections orthogonales respectives de M_n et M_{n+1} sur $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$.
2. Calculer, en unités d'aire, l'aire V_n du trapèze $P_nM_nM_{n+1}P_{n+1}$ pour $n > 0$. Montrer que le rapport $\dfrac{V_n}{U_n}$ est constant.

Annexe