

⌘ Baccalauréat série S Antilles-Guyane juin 2003 ⌘

EXERCICE 1

4 points

Commun tous les candidats

Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2 cm). On considère les points A et B d'affixes respectives $A(3+2i)$ et $B(-1+4i)$. Extérieurement au triangle OAB, on construit les deux carrés OA_1A_2A et OBB_1B_2 .

- En remarquant que A_2 est l'image de O par une rotation de centre A, déterminer l'affixe de A_2 . En déduire l'affixe du centre I du carré OA_1A_2A .
 - En remarquant que B_1 est l'image de O par une rotation de centre B, déterminer l'affixe de B_1 . En déduire l'affixe du centre J du carré OBB_1B_2 .
- Calculer l'affixe du milieu K du segment [AB]. À l'aide des affixes des différents points, calculer les longueurs KI et KJ, ainsi qu'une mesure de l'angle (\vec{KI}, \vec{KJ}) . Que peut-on en déduire?

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.

Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

- Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,0494.
- Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.
 - Définir la loi de X .
 - Calculer l'espérance mathématique de X . Quel est le sens de ce nombre?
- Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.
 - Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50%. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.
- La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,0007, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,0007e^{-0,0007x}.$$

Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

- Calculer : $(1 + \sqrt{6})^2$, $(1 + \sqrt{6})^4$, $(1 + \sqrt{6})^6$.
 - Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que :

$$(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

Que valent a_1 et b_1 ?

D'après les calculs de la question 1. a., donner d'autres valeurs de a_n et b_n .

- a. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- b. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.
En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.
- c. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.
En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

PROBLÈME

11 points

A. On se propose de résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = 2(e^{2x} - 1).$$

1. Montrer que la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = 2xe^{2x} + 1$$

est solution de l'équation différentielle (E).

2. On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).
3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0. Elle sera appelée g et étudiée dans la **partie B**.

B. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1.$$

1. Déterminer le sens de variation de g . Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur \mathbb{R} .
2. a. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $1 - g(x) \geq 0$.
b. Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)] dx$.
c. Interpréter graphiquement les résultats des questions a. et b..

C. On considère la fonction numérique f définie pour x réel non nul par :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on précisera.
3. Déterminer le sens de variation de f et donner son tableau de variations (on pourra utiliser la **partie B**).

4. Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , avec pour unités : 4 cm sur $(O; \vec{i})$ et 2 cm sur $(O; \vec{j})$. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées arrondies à 10^{-2} près, construire la courbe \mathcal{C} pour des valeurs de x comprises entre -2 et 1 .

x	-2	-1,5	-1	-0,5	-0,2	-0,1	-0,05	0,05	0,1	0,2	0,5	1
$f(x)$												

5. Soit f_1 la fonction définie par $\begin{cases} f_1(x) = f(x), & x \neq 0 \\ f_1(0) = 0 \end{cases}$

Cette fonction est définie et continue sur \mathbb{R} . En supposant que f_1 est dérivable en 0, expliquer comment on peut déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé $f'(0)$; faire cette lecture graphique.

Quel résultat de limite cela permet-il de conjecturer?

D. On se propose de trouver un encadrement de l'intégrale :

$$J = \int_{-2}^{-1} \frac{e^{2x} - 1}{x} dx.$$

Montrer que pour tout x de $[-2; -1]$ on a : $-\frac{0,86}{x} \leq \frac{e^{2x} - 1}{x} \leq -\frac{0,99}{x}$.
En déduire un encadrement de J d'amplitude 0,1.