# Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2006

**EXERCICE 1** **3 points**

**Commun à tous les candidats**

1. **Restitution organisée des connaissances**
   **Pré-requis :**
   — la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$.
   — $\ln(1) = 0$
   Démontrer que pour tous réels strictement positifs $a$ et $x$,
   $$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$
2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que
   $$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ et que } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$
   pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$.
3. On donne $0,69 \leqslant \ln 2 \leqslant 0,70$ et $1,09 \leqslant \ln 3 \leqslant 1,10$.
   En déduire des encadrements de $\ln 6$, $\ln\left(\dfrac{1}{6}\right)$, et $\ln\left(\dfrac{3}{8}\right)$.

**EXERCICE 2** **3 points**

**Commun à tous les candidats**

QCM : pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 0,75 point, chaque erreur enlève 0,25 point, l'absence de réponse vaut 0 point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.
Vous répondrez sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse.

1. L'équation $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** 0 solution | **b.** 1 solution | **c.** 2 solutions | **d.** plus de 2 solutions |

2. L'expression $-e^{-x}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** n'est jamais négative | **b.** est toujours négative | **c.** n'est négative que si $x$ est positif | **d.** n'est négative que si $x$ est négatif |

3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{x} - 1}{e^{x} + 2} =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $-\dfrac{1}{2}$ | **b.** 1 | **c.** 2 | **d.** $+\infty$ |

4. L'équation différentielle $y = 2y' - 1$ a pour ensemble de solutions :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $x \mapsto ke^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | **b.** $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} + 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | **c.** $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$ | **d.** $x \mapsto ke^{2x} + \dfrac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$ |

**EXERCICE 3** **4 points**
**Commun à tous les candidats**
**Partie A**

Soit $X$ une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
On rappelle que $P(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
La courbe donnée en ANNEXE 1 représente la fonction densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre $\lambda$.

**Partie B**

On pose $\lambda = 1{,}5$.

1. Calculer $P(X \leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à $10^{-3}$ près par excès.
2. Calculer $P(X \geqslant 2)$.
3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}173$ à $10^{-3}$ près.
4. Calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x 1{,}5t\mathrm{e}^{-1{,}5t}\,\mathrm{d}t$.
   Déterminer la limite quand $x$ tend vers $+\infty$ de $F(x)$ ; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable $X$.

**Partie C**

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   **a.** Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à $10^{-3}$ près.
   **b.** Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   **a.** Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
   **b.** Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

**EXERCICE 4** **5 points**
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points
   — $A$ d'affixe $a$, $a \in \mathbb{R}$
   — $B$ d'affixe $b + \mathrm{i}$, $b \in \mathbb{R}$
   — $C$ image de $B$ dans la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

**a.** Déterminer une relation entre $a$ et $b$ pour que le point $C$ appartienne à l'axe $\left(O\,;\,\vec{v}\right)$.

**b.** Exprimer alors l'affixe du point $C$ en fonction de $a$.

**2.** Dans cette question, on pose $a=\sqrt{3}$ et $b=0$. On considère les points $C$ d'affixe $c=-\text{i}$ et $D$ d'affixe $d=2+\sqrt{3}-2\text{i}\sqrt{3}$.

**a.** Quelle est la nature du triangle $ABC$ ?

**b.** Calculer le quotient $\dfrac{d-a}{c-a}$ ; que peut-on en déduire pour le triangle $ACD$ ?

**c.** Déterminer l'affixe du point $E$ image de $D$ dans la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

**d.** Déterminer l'affixe du point $F$ image de $D$ dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

**e.** Déterminer la nature du triangle $BEF$.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Sur la figure donnée en ANNEXE 2, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que :

$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OC}\,;\,\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

On désigne par $I$ le milieu du segment $[CD]$, par $J$ le milieu du segment $[OC]$ et par $H$ le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$.

**1.** Justifier l'existence d'une similitude directe $s$ transformant $A$ en $I$ et $D$ en $E$.

**2.** Déterminer le rapport de cette similitude $s$.
On admet que l'angle de la similitude $s$ est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

**3.** Donner, sans justifier, l'image de $B$ par $s$.

**4.** Déterminer et placer l'image de $C$ par $s$.

**5.** Soit $\Omega$ le centre de la similitude $s$.

**a.** Montrer que $\Omega$ appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.

**b.** Montrer que $\Omega$ ne peut être le point $H$.

**c.** Construire $\Omega$.

**6.** On considère le repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OC}\right)$.

**a.** Déterminer l'écriture complexe de la similitude $s$.

**b.** En déduire l'affixe du centre $\Omega$ de $s$.

**EXERCICE 5** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

On considère les suites de points $A_n$ et $B_n$ définies pour tout entier naturel $n$ de la manière suivante : sur un axe orienté $\left(O\,;\,\vec{u}\right)$ donné en ANNEXE 3, le point $A_0$ a pour abscisse 0 et le point $B_0$ a pour abscisse 12.
Le point $A_{n+1}$ est le barycentre des points $(A_n,\ 2)$ et $(B_n,\ 1)$, le point $B_{n+1}$ est le barycentre des points pondérés $(A_n,\ 1)$ et $(B_n,\ 3)$.

**1.** Sur le graphique placer les points $A_2, B_2$.

**2.** On définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ des abscisses respectives des points $A_n$ et $B_n$. Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}.$$

On admet de même que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

**Partie B**

**1.** On considère la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $u_n = b_n - a_n$.

**a.** Montrer que la suite $(u_n)$ est géométrique. En préciser la raison.

**b.** Donner l'expression de $u_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.

**c.** Déterminer la limite de $(u_n)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

**2. a.** Démontrer que la suite $(a_n)$ est croissante (on pourra utiliser le signe de $u_n$).

**b.** Étudier les variations de la suite $(b_n)$.

**3.** Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ ?

**Partie C**

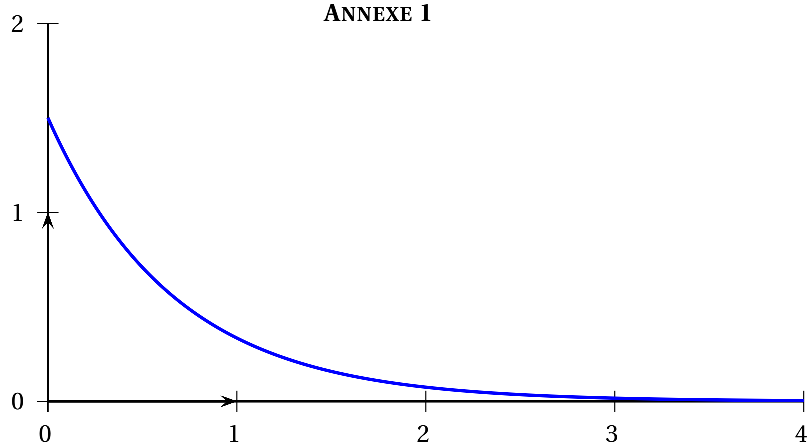
**1.** On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par

$$v_n = 3a_n + 4b_n.$$

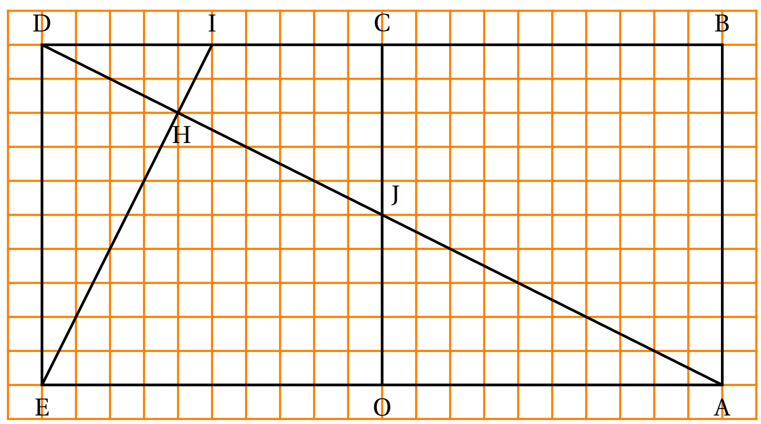
Montrer que la suite $(v_n)$ est constante.

**2.** Déterminer la limite des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

**ANNEXE 1**




**ANNEXE 2**




**ANNEXE 3**