Baccalauréat S Antilles-Guyane
septembre 2002

EXERCICE 1

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}.$$

   a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.
On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au n-ième lancer »,
par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de A_n,
par R_n l'évènement « on obtient rouge au n-ième lancer »,
par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de R_n,
par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

   a. Déterminer a_1.

   b. Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.

   c. En remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup \left(R_n \cap \overline{A_n}\right)$, montrer que $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

   d. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.

   e. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,
$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

   f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2
Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_\text{A} = 1 + \text{i} \quad \text{et} \quad z_\text{B} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $\text{e}^{\text{i}\alpha}$, $\alpha \in [0 ; 2\pi]$.
On considère l'application f qui tout point M de $(\mathscr{C})$, associe
$f(M) = M\text{A} \times M\text{B}$.

a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sin\alpha.$$

b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$.

c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

3. a. En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b. En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE 2
Enseignement de spécialité

Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \overrightarrow{\mathrm{BD}}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD]. On appelle $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ les cercles de diamètres respectifs [AB], [BC], [CD] et [DA].
On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. a. Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.

b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

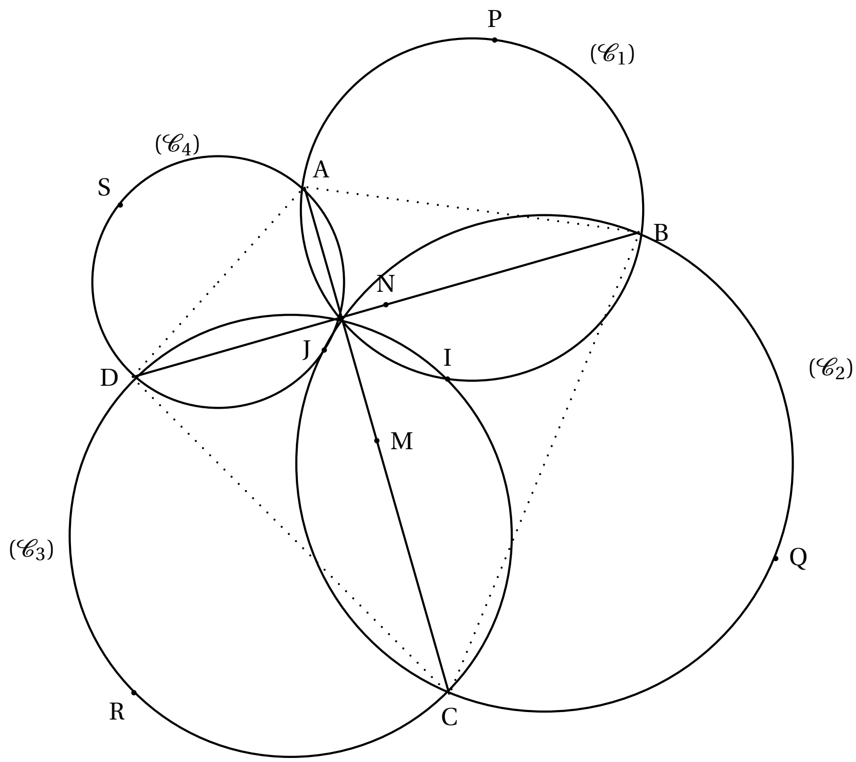
c. Quelle est la nature du quadrilatère INJM ?

2. On désigne par P et R les points diamètralement opposés à I sur, respectivement $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$ et par Q et S les points diamètralement opposés à J sur, respectivement $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

b. En déduire que J est le milieu de [PR].



Problème

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(1) & = & 0 \\ f(x) & = & (\ln x) \times \ln(1-x), \quad \text{pour} \quad x \in]0\,;\,1[\end{array}\right.$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).
On admet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, ainsi que le résultat suivant :

$$\text{pour} \quad \alpha > 0, \quad \lim_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0.$$

Partie A - Étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

   b. En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[, \quad f\left(\dfrac{1}{2}-x\right) = f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$.

   Que peut-on en conclure pour $\mathscr{C}$?

3. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,1[$ par :

$$\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x.$$

   a. Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x) = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur $]0\,;\,1[$.

b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur $]0\,;\,1[$ (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur $]0\,;\,1[$.

c. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]0\,;\,1[$.

4. a. Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur $]0\,;\,1[$.

b. Donner le tableau de variations de f.

c. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,1[$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leqslant (\ln 2)^2.$$

d. Tracer $\mathcal{C}$.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

Pour $t \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, on pose :

$$I_1(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x \ln x \,\mathrm{d}x, \quad I_2(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x, \quad I(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. a. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :

$$I_1(t) = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}t^2 \ln t + \frac{t^2}{4};$$

$$I_2(t) = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{t^3 \ln t}{3} + \frac{t^3}{9}.$$

b. Déterminer les limites de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ quand t tend vers 0.

2. Soit g et h les fonctions définies sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ par :

$$g(x) = -\left[x + \frac{x^2}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}.$$

a. Étudier sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$ les variations de la fonction

$$x \longmapsto \ln(1-x) - g(x).$$

b. En déduire que, pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$:

$$\ln(1-x) \leqslant g(x).$$

c. Par un procédé analogue, montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$:

$$\ln(1-x) \geqslant h(x).$$

d. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$.

3. a. Montrer que $-I_1(t) - \dfrac{1}{2}I_2(t) \leqslant I(t) \leqslant -I_1(t) - I_2(t)$.

b. En supposant que $I(t)$ admet une limite notée ℓ quand t tend vers 0, donner un encadrement de ℓ.