

∞ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∞
septembre 2002

EXERCICE 1

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}.$$

- a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n .
2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches. On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite. On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au n -ième lancer », par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de A_n , par R_n l'évènement « on obtient rouge au n -ième lancer », par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de R_n , par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n .

- a. Déterminer a_1 .
- b. Déterminer r_1 . Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.
- c. En remarquant que, pour tout $n \geq 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$, montrer que
- $$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}.$$
- d. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$.
- e. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
- $$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3},$$
- puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n .
- f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i \quad \text{et} \quad z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B .
2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0; 2\pi]$.

On considère l'application f qui à tout point M de $(\mathcal{C})$, associe
 $f(M) = MA \times MB$.

- a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha} \sin \alpha.$$

- b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right) e^{i\alpha} \right|$.

- c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha \right)^2}$.

3. a. En utilisant 2 c, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.
- b. En utilisant 2 c, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathcal{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE 2

Enseignement de spécialité

Dans le plan, on considère deux segments $[AC]$ et $[BD]$ tels que

$$AC = BD \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

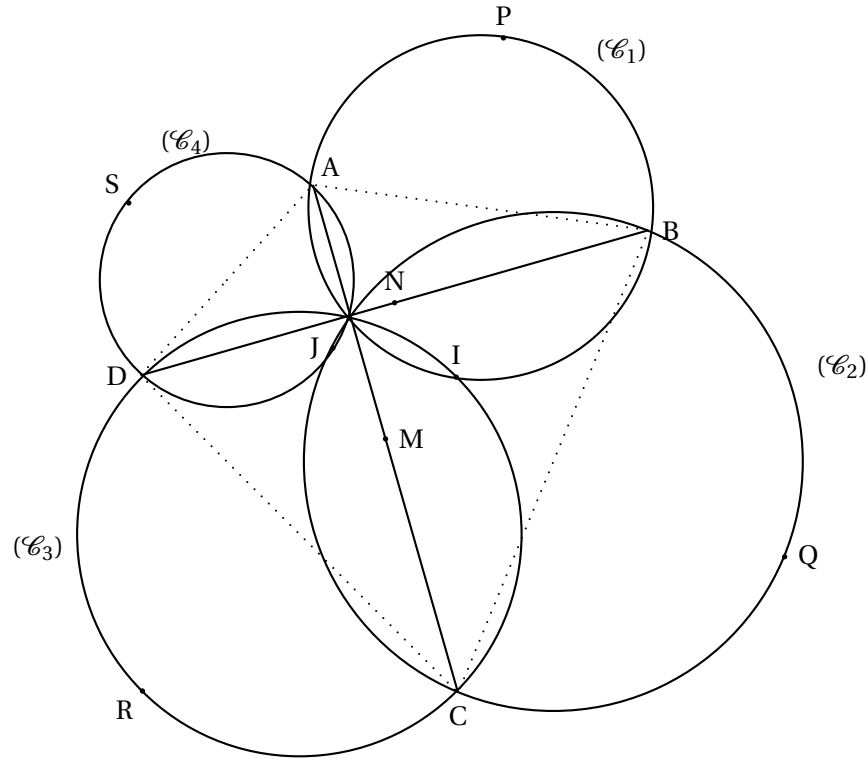
On désigne par M le milieu de $[AC]$ et par N celui de $[BD]$. On appelle $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$ et $(\mathcal{C}_4)$ les cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. a. Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D . Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_3)$.
- b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B . Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_4)$.
- c. Quelle est la nature du quadrilatère $INJM$?
2. On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I sur, respectivement $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_3)$ et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_4)$.

Soit s la similitude directe de centre I , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

- a. Quelles sont les images par s des points D , N , B ?
- b. En déduire que J est le milieu de $[PR]$.

**PROBLÈME**

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = (\ln x) \times \ln(1-x), \text{ pour } x \in]0; 1[\end{cases}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, ainsi que le résultat suivant :

$$\text{pour } \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0.$$

Partie A - Étude de la fonction f

1. a. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\frac{\ln(1-x)}{x}$.
 b. En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\frac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$, $f\left(\frac{1}{2}-x\right) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$.
 Que peut-on en conclure pour $\mathcal{C}$?

3. Soit φ la fonction définie sur $]0; 1[$ par :

$$\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x.$$

- a. Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur $]0; 1[$.
 - b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur $]0; 1[$ (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur $]0; 1[$.
 - c. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]0; 1[$.
4. a. Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur $]0; 1[$.
- b. Donner le tableau de variations de f .
- c. Montrer que, pour tout $x \in]0; 1[$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leq (\ln 2)^2.$$

d. Tracer $\mathcal{C}$.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

Pour $t \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, on pose :

$$I_1(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x \ln x \, dx, \quad I_2(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x \, dx, \quad I(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} f(x) \, dx.$$

1. a. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :

$$I_1(t) = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}t^2 \ln t + \frac{t^2}{4};$$

$$I_2(t) = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{t^3 \ln t}{3} + \frac{t^3}{9}.$$

b. Déterminer les limites de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ quand t tend vers 0.

2. Soit g et h les fonctions définies sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ par :

$$g(x) = -\left[x + \frac{x^2}{2}\right] \quad \text{et} \quad h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}.$$

a. Étudier sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ les variations de la fonction

$$x \mapsto \ln(1-x) - g(x).$$

b. En déduire que, pour tout $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$:

$$\ln(1-x) \leq g(x).$$

- c. Par un procédé analogue, montrer que pour tout $x \in \left] 0 ; \frac{1}{2} \right[:$

$$\ln(1-x) \geq h(x).$$

- d. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $\left] 0 ; \frac{1}{2} \right[$.

3. a. Montrer que $-I_1(t) - \frac{1}{2}I_2(t) \leq I(t) \leq -I_1(t) - I_2(t)$.
b. En supposant que $I(t)$ admet une limite notée ℓ quand t tend vers 0, donner un encadrement de ℓ .