Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}.$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.

2. a. Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{sur } [1\ ;\ +\infty[.$$

b. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1\ ;\ +\infty[$.

c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$\mathrm{I} = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour l'axe $(\mathrm{O}x)$ de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$ dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :

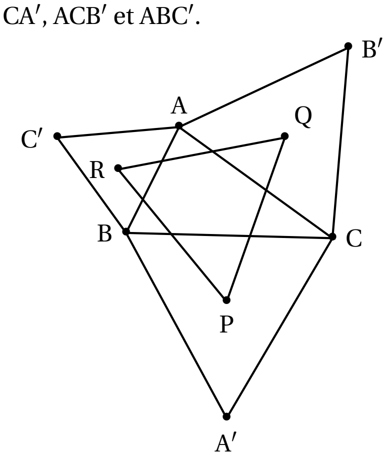
$$\mathscr{V} = \pi\int_0^3 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

a. Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

b. Déterminer alors une valeur approchée à 1 cm^3 près du volume du solide.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA′, ACB′ et ABC′. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravité respectifs des triangles B CA′, ACB′ et ABC′.



On note $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ p,\ q$ et r les affixes respectives des points A, B, C, A′, B′, C′, P, Q et R.

1. **a.** Traduire, avec les affixes des points concernés, que C′ est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

   b. Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.
2. En déduire que $p + q + r = a + b + c$.
3. En déduire que les triangles ABC, A′B′C′ et PQR ont même centre de gravité.
4. Montrer que :

$$3(q - p) = \left(b' - c\right) + \left(c - a'\right) + (a - b).$$

   On admettra que, de même : $3(r - p) = (a - c) + \left(b - a'\right) + \left(c' - b\right)$.
5. Justifier les égalités suivantes :

$$a - c = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\left(b' - c\right)\ ;\ b - a' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\left(c - a'\right)\ ;\ c' - b = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a - b).$$

6. Déduire des **questions 4.** et **5.** que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE 3 (OBLIGATOIRE) **5 points**

$\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.
Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M distinct de O, d'affixe z , associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, on appelle E′ son image par F. Déterminer l'affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

   b. On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.
2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K′ l'image de K par F. Calculer l'affixe de K′.

   b. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.
3. On désigne par R un point d'affixe $1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$; R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

   a. Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$.
   En déduire que $\left|z' + 1\right| = \left|z'\right|$.

   b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où θ décrit l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat de **a.**.

EXERCICE 3 (SPÉCIALITÉ) **5 points**

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9.

4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :

$$24x + 35y = 9$$

est l'ensemble des couples :

$$(-144 + 70k\ ;\ 99 - 24k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$. .
6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = \text{i}\overline{z} + (1 - \text{i})$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

EXERCICE 4 **5 points**

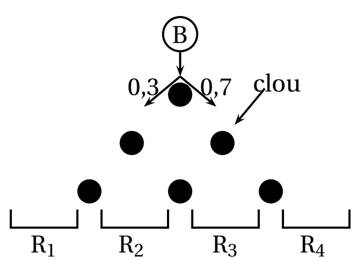
Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée.
Les trois questions sont indépendantes.

1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que
   - si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;
   - le test est positif pour 3 % des personnes saines.

   Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

   ☐ 0,95 ☐ 0,9 ☐ 0,15 ☐ 0,05

2. On considère une planche à clous de ce type :



   On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés R_1, R_2, R_3 et R_4. À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite (gauche et droite relatives à l'observateur).
   On note p_1 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_1 ou dans le bac R_3 et p_2 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_2 ou dans le bac R_4.
   Que valent p_1 et p_2 ?

   ☐ $p_1 = p_2 = 0,5$ ☐ $p_1 = 0,216$ et $p_2 = 0,784$
   ☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,532$
   ☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,432$.

3. Les 1 000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510
5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3233066470	9384460959	0582235725	3594085234
8111745028	4102701930	5211055596	4462294895	4930301964
4288109756	6593344612	8475648233	7867831652	7120190914
5648566923	4603486534	5432664825	3393607260	2491412737
2450700660	6315580574	8815209209	6282925409	1715364367
8925903600	1133053054	8820466525	3841469519	4151160943
3057270365	7595919530	9218611738	1932611793	1051185480
7446297996	2749567355	8857527240	9122793318	3011949129
8336733624	4065664308	6025394946	3952247371	9070217986
0943702770	5392171762	9317675238	4674818467	6691051320
0056812714	5263560827	7857753427	9778900917	3637178721
4684409012	2495343054	6549585371	0507922796	8925892354
2019956112	1290219608	6403441815	9813629774	7713099605
1870721134	9999998372	9780499510	5973173281	6096318599
0244594553	4690830264	2522300253	3446850352	6193110017
1010003137	8387528865	8753320830	1420617177	6691473035
9825349042	8755460731	1595620633	8235378759	3751957781
8577805321	7122600661	3001927876	6111959092	1642019894

En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	93	116	102	102	94	97	94	95	101	106

Avec un tableur, on a simulé 1 000 expériences de 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \sum_{k=0}^{k=9} \left(f_k - 0,1\right)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.

On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile (d_1 et d_9), le premier et troisième quartile (Q_1 et Q_3) et la médiane (Me) :

$d_1 = 0,000\,422$; $Q_1 = 0,000\,582$; Me $= 0,000\,822$; $Q_3 = 0,001\,136$; $d_9 = 0,001\,45$.

En effectuant le calcul de d_2 sur la série des 1 000 premières décimales de π, on obtient :

☐ 0,000 456 ☐ 0,004 56 ☐ 0,000 314

Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

☐ Oui ☐ Non ☐ Il ne peut pas conclure.