Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2005

Exercice 1 **5 points**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. **a.** Démontrer que pour tout $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant n - 2$.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
   c. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
   d. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

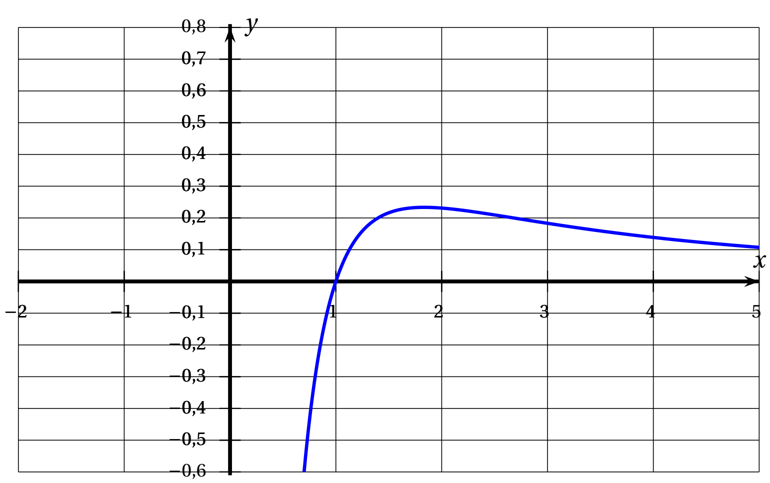
Exercice 2 **4 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}.$$

1. Montrer que pour tout $x > 1$, $\frac{\ln x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x}$.
2. **a.** Calculer $\mathrm{I} = \int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière).
   b. En déduire un encadrement de $\mathrm{K} = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. La figure ci-dessous représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2 & \leqslant & x & \leqslant & 4 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right. \quad \text{et on note } \mathcal{A} \text{ son aire.}$$



À l'aide de l'encadrement trouvé au 2 b, donner un encadrement de $\mathscr{A}$ en cm^2.

EXERCICE 3 **4 points**

Soit $\mathscr{P}$ le plan complexe rapporté au repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm). Soit A le point d'affixe 1. On note f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1}{z-1}.$$

1. a. Soit B le point d'affixe $b = 4 + \text{i}\sqrt{3}$. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de l'affixe b' de B$'$.

b. Déterminer les affixes des points ayant pour image par f leur symétrique par rapport à O.

2. a. Exprimer $\left|z'\right|$ et $\arg\left(z'\right)$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$.

b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. On suppose que M est un point de $\mathscr{C}$. Déterminer $\left|z'\right|$.
En déduire que M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

c. Placer un point M quelconque sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$ et construire son image M'. (On laissera les traits de construction,)

EXERCICE 4 **4 points**

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t min est définie par :

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x.$$

1. a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda x \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x$ en fonction de t.

b. En déduire que le temps moyen est $\dfrac{1}{\lambda}$.

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?

3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

EXERCICE 5 **4 points**

Pour cet exercice, vous recopierez pour chaque question, votre réponse.
Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée.*
Il sera retiré 0,5 *point par réponse fausse.*
La note finale de l'exercice ne pourra pas être inférieure à zéro.

Soit $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormal.

1. La droite passant par A$(1~;~2~;~-4)$ et B$(-3~;~4~;~1)$ et la droite représentée par $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -11-4t\\ y &=& 8+2t\\ z &=& 11+5t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$ sont :

☐ sécantes ☐ strictement parallèles ☐ confondues ☐ non coplanaires

2. Soient le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-z+4=0$ et la droite $\mathscr{D}$ représentée par $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& 8+t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$

☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants. ☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont strictement parallèles.

☐ $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$. ☐ Aucune de ces possibilités n'est vraie.

3. La distance du point A$(1~;~2~;~-4)$ au plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ est :

☐ $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$ ☐ 16 ☐ $8\sqrt{14}$ ☐ $\dfrac{8}{7}$

4. Soient le point B$(-3~;~4~;~1)$ et la sphère $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=16$;

☐ B est à l'intérieur de $\mathscr{S}$ ☐ B est à l'extérieur de $\mathscr{S}$

☐ B est sur $\mathscr{S}$ ☐ On ne sait pas.