Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2006

EXERCICE 1 **6 points**

On se propose de déterminer des valeurs approchées de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{10t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

en utilisant deux méthodes distinctes.

Les parties A et B sont largement indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A
Utilisation d'une intégration par parties

1. En remarquant que $\dfrac{10t^2}{1+t^2} = 5t \times \dfrac{2t}{1+t^2}$, établir l'égalité

$$\mathrm{I} = \frac{5}{2} \times \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}t.$$

2. On pose, pour x positif ou nul, $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$.
   (a) En utilisant les variations de f, démontrer que $f(x) \geqslant 0$. En procédant de la même façon, on pourrait établir que $g(x) \leqslant 0$, inégalité que l'on admettra ici.
   (b) À l'aide de ce qui précède, montrer que l'encadrement :
   $$t^2 - \frac{t^4}{2} \leqslant \ln\left(1+t^2\right) \leqslant t^2.$$
   est vrai pour tout réel t.
   (c) Déduire de la question précédente que
   $$\frac{5}{24} \leqslant -5\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1+t^2\right)\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{37}{192}.$$
3. En utilisant les questions précédentes, donner un encadrement d'amplitude inférieure à 0,02 de I par des nombres décimaux ayant trois chiffres après la virgule.

PARTIE B
Utilisation de la méthode d'Euler

1. On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{10t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.
   Préciser $\Phi(0)$ ainsi que la fonction dérivée de φ.

2. On rappelle que la méthode d'Euler permet de construire une suite de points $M_n\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ proches de la courbe représentative de φ. En choisissant comme pas $h = 0,1$, on obtient la suite de points M_n définie pour n entier naturel par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0\\ y_0 & = & 0\end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + 0,1\\ y_{n+1} & = & y_n + \Phi'\left(x_n\right) \times 0,1\end{array}\right.$$

   En utilisant, sans la justifier, l'égalité $x_n = \dfrac{n}{10}$, vérifier que $y_{n+1} = y_n + \dfrac{n^2}{100+n^2}$.

3. Calculer y_1, et y_2, puis exprimer y_3, y_4 et y_5 sous la forme d'une somme de fractions que l'on ne cherchera pas à simplifier.

   Donner maintenant une valeur approchée à $0,001$ près de y_5.

   Le réel x_5 étant égal à $\dfrac{1}{2}$, y_5 est donc une valeur approchée de $\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire de I.

4. Avec la méthode d'Euler au pas $h = 0,01$, on obtient, pour I, la valeur approchée $0,354$.

   Les valeurs de I obtenues avec la méthode d'Euler sont-elles compatibles avec l'encadrement de la question 3. de la partie A ?

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On désigne par A et B les point, d'affixes respectives 2 et 3.
On fera un dessin (unité graphique 2 cm) qui sera complété selon indications de l'énoncé.
La question 1 *est indépendante des questions* 2 *et* 3.

1. (a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 - 4z + 6 = 0.$$

   (b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives

$$z_1 = 2 + \text{i}\sqrt{2} \text{ et } z_2 = 2 - \text{i}\sqrt{2}.$$

   Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_1 - 3}{z_1}$.

   En déduire que le triangle OBM_1 est un triangle rectangle.

   (c) Démontrer sans nouveau calcul que les points O, B, M_1 et M_2, appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ que l'on précisera.

   Tracer le cercle $\mathscr{C}$ et placer les points M_1 et M_2 sur le dessin.

2. On appelle f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par l'égalité $z' = z^2 - 4z + 6$.

   On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

   Ce cercle ne sera pas tracé sur le dessin,

(a) Vérifier l'égalité suivante $z' - 2 = (z-2)^2$.

(b) Soit M le point de Γ d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ désigne un réel de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Vérifier l'égalité suivante : $z' = 2 + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$ et en déduire que M' est situé sur un cercle Γ' dont on précisera le centre et le rayon.

Tracer Γ' sur le dessin,

3. On appelle D le point d'affixe $d = 2 + \dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{6}}{2}$ et on désigne par D$'$ l'image de D par f.

(a) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $d-2$.

En déduire que D est situé sur le cercle Γ.

(b) À l'aide la question 2. b., donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}'}\right)$ et placer le point D$'$ sur le dessin.

(c) Démontrer que le triangle OAD$'$ est équilatéral.

EXERCICE 3 **4 points**

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ alors, pour t réel positif, $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

- Démontrer l'égalité suivante : $p(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
- En déduire que, pour s et t réels positifs, l'égalité suivante est vraie $P_{(X>t)}(X > s+t) = p(X > s)$ (loi de durée de vie sans vieillissement), $P_{(X>t)}(X > s+t)$ désignant la probabilité de l'évènement $(X > s+t)$ sachant que $(X > t)$ est réalisé.

Partie B

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ.

1. (a) Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \leqslant 10) = 0,7$.

On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur $0,12$ comme valeur approchée de λ.

(b) Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle $P_{(T>10)}(T > 15)$.

(c) Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.

On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à $0,01$ près de la réponse.

On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.

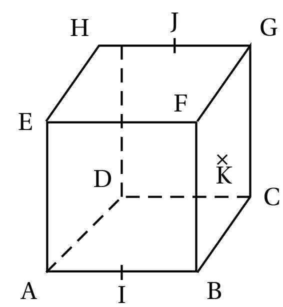
(a) Donner la nature et les paramètres caractéristiques de Y.

(b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes.

Déterminer à $0,01$ près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

EXERCICE 4 **5 points**

Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGF. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. (a) Démontrer que le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme.

   Établir que DIFJ est en fait un losange et montrer que l'aire de ce losange est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

   (b) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DIJ).

   En déduire une équation cartésienne de ce plan.

   (c) Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume de la pyramide EDIFJ. On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h et de base correspondante $\mathcal{B}$ est donné par la formule suivante $\text{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$.

2. Soit (Δ) la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ)

   (a) Donner une représentation paramétrique de (Δ) et prouver que K est un point de (Δ).

   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DIJ).

   (c) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3. Soit (S) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \dfrac{4}{3} = 0$.

(a) Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

(b) Montrer que L est un point de (S), Quelle propriété géométrique relative à (S) et au plan (DIJ) peut-un déduire de ce dernier résultat ?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On désigne par A et C les points d'affixes respectives 1 et 2i.
Sur le dessin joint en annexe (à rendre avec la copie), le quadrilatère OABC est un rectangle et I désigne le milieu de [AB].

1. (a) Justifier le fait qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme O en I et A en C.

   (b) Déterminer l'écriture complexe de s. En déduire les éléments caractéristiques de s et, en particulier, établir que l'affixe du centre Ω de s vaut $\dfrac{1+3\text{i}}{5}$.

   (c) Vérifier par un calcul que Ω est situé sur le cercle Γ de centre A passant par O.

2. Soit f l'application du plan complexe d'écriture complexe

$$z \longmapsto \frac{-3-4\text{i}}{5}\overline{z}+\frac{8+4\text{i}}{5}.$$

   (a) Déterminer les images par f des points A et C. En déduire la nature précise de f, puis démontrer que I est l'image de Ω par la symétrie orthogonale d'axe (AC).

   (b) Construire le cercle Γ sur le dessin et placer également le point Ω en utilisant les informations géométriques précédentes.

3. À tout point M d'image M' par s, on associe le point M'' défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\Omega M}$.

   (a) Quel est le point Ω'' associé à Ω ?

   (b) Construire avec soin le point A$''$ en laissant les traits de construction.

   (c) On suppose maintenant que M a pour affixe z.
   Démontrer que M'' a pour affixe $z'' = \text{i}z+\dfrac{4+2\text{i}}{5}$.
   En déduire que M'' est l'image de M par une similitude dont on donnera les éléments caractéristiques.

   (d) Déterminer et représenter sur le dessin l'ensemble Γ'' des points M'' lorsque M décrit le cercle Γ.

Annexe (exercice de spécialité)