

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2006 ∞

EXERCICE 1

6 points

On se propose de déterminer des valeurs approchées de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{10t^2}{1+t^2} dt$$

en utilisant deux méthodes distinctes.

Les parties A et B sont largement indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE A

Utilisation d'une intégration par parties

1. En remarquant que $\frac{10t^2}{1+t^2} = 5t \times \frac{2t}{1+t^2}$, établir l'égalité

$$I = \frac{5}{2} \times \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 5 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2) dt.$$

2. On pose, pour x positif ou nul, $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = \ln(1+x) - x$.
- (a) En utilisant les variations de f , démontrer que $f(x) \geq 0$. En procédant de la même façon, on pourrait établir que $g(x) \leq 0$, inégalité que l'on admettra ici.
- (b) À l'aide de ce qui précède, montrer que l'encadrement :

$$t^2 - \frac{t^4}{2} \leq \ln(1+t^2) \leq t^2.$$

est vrai pour tout réel t .

- (c) Dédire de la question précédente que

$$\frac{5}{24} \leq -5 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2) dt \leq -\frac{37}{192}.$$

3. En utilisant les questions précédentes, donner un encadrement d'amplitude inférieure à 0,02 de I par des nombres décimaux ayant trois chiffres après la virgule.

PARTIE B

Utilisation de la méthode d'Euler

1. On pose $\Phi(x) = \int_0^x \frac{10t^2}{1+t^2} dt$ pour $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Préciser $\Phi(0)$ ainsi que la fonction dérivée de φ .

2. On rappelle que la méthode d'Euler permet de construire une suite de points $M_n(x_n; y_n)$ proches de la courbe représentative de φ . En choisissant comme pas $h = 0,1$, on obtient la suite de points M_n définie pour n entier naturel par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0,1 \\ y_{n+1} = y_n + \Phi'(x_n) \times 0,1 \end{cases}$$

En utilisant, sans la justifier, l'égalité $x_n = \frac{n}{10}$, vérifier que $y_{n+1} = y_n + \frac{n^2}{100 + n^2}$.

3. Calculer y_1 , et y_2 , puis exprimer y_3, y_4 et y_5 sous la forme d'une somme de fractions que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Donner maintenant une valeur approchée à 0,001 près de y_5 .

Le réel x_5 étant égal à $\frac{1}{2}$, y_5 est donc une valeur approchée de $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire de I.

4. Avec la méthode d'Euler au pas $h = 0,01$, on obtient, pour I, la valeur approchée 0,354.

Les valeurs de I obtenues avec la méthode d'Euler sont-elles compatibles avec l'encadrement de la question 3. de la partie A?

EXERCICE 2

5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A et B les points, d'affixes respectives 2 et 3.

On fera un dessin (unité graphique 2 cm) qui sera complété selon indications de l'énoncé.

La question 1 est indépendante des questions 2 et 3.

1. (a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 - 4z + 6 = 0.$$

- (b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives

$$z_1 = 2 + i\sqrt{2} \text{ et } z_2 = 2 - i\sqrt{2}.$$

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_1 - 3}{z_1}$.

En déduire que le triangle OBM_1 est un triangle rectangle.

- (c) Démontrer sans nouveau calcul que les points O, B, M_1 et M_2 , appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ que l'on précisera.

Tracer le cercle $\mathcal{C}$ et placer les points M_1 et M_2 sur le dessin.

2. On appelle f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par l'égalité $z' = z^2 - 4z + 6$.

On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

Ce cercle ne sera pas tracé sur le dessin,

- (a) Vérifier l'égalité suivante $z' - 2 = (z - 2)^2$.

- (b) Soit M le point de Γ d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}e^{i\theta}$ où θ désigne un réel de l'intervalle $] -\pi ; \pi]$.
 Vérifier l'égalité suivante : $z' = 2 + 2e^{2i\theta}$ et en déduire que M' est situé sur un cercle Γ' dont on précisera le centre et le rayon.
 Tracer Γ' sur le dessin.
3. On appelle D le point d'affixe $d = 2 + \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$ et on désigne par D' l'image de D par f .
- (a) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $d - 2$.
 En déduire que D est situé sur le cercle Γ .
- (b) À l'aide la question 2. b., donner une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AD'})$ et placer le point D' sur le dessin.
- (c) Démontrer que le triangle OAD' est équilatéral.

EXERCICE 3**4 points****Partie A**

On suppose connu le résultat suivant :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif

λ alors, pour t réel positif, $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

- Démontrer l'égalité suivante : $p(X > t) = e^{-\lambda t}$.
- En déduire que, pour s et t réels positifs, l'égalité suivante est vraie
 $P_{(X>t)}(X > s + t) = p(X > s)$ (loi de durée de vie sans vieillissement),
 $P_{(X>t)}(X > s + t)$ désignant la probabilité de l'évènement $(X > s + t)$ sachant que $(X > t)$ est réalisé.

Partie B

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ .

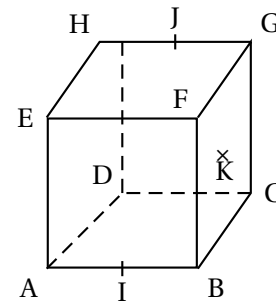
1. (a) Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \leq 10) = 0,7$.
 On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur 0,12 comme valeur approchée de λ .
- (b) Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle
 $P_{(T>10)}(T > 15)$.
- (c) Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.
 On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à 0,01 près de la réponse.
- On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.

- (a) Donner la nature et les paramètres caractéristiques de Y .
- (b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes.
Déterminer à 0,01 près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

EXERCICE 4

5 points

Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGF. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. (a) Démontrer que le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme.
Établir que DIFJ est en fait un losange et montrer que l'aire de ce losange est égale à $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
- (b) Vérifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (DIJ).
En déduire une équation cartésienne de ce plan.
- (c) Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume de la pyramide EDIFJ. On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h et de base correspondante $\mathcal{B}$ est donné par la formule suivante $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$.
2. Soit (Δ) la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ)
 - (a) Donner une représentation paramétrique de (Δ) et prouver que K est un point de (Δ) .
 - (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de (Δ) et du plan (DIJ).
 - (c) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.
3. Soit (S) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z + \frac{4}{3} = 0$.
 - (a) Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
 - (b) Montrer que L est un point de (S), Quelle propriété géométrique relative à (S) et au plan (DIJ) peut-on déduire de ce dernier résultat?

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A et C les points d'affixes respectives 1 et $2i$.

Sur le dessin joint en annexe (à rendre avec la copie), le quadrilatère OABC est un rectangle et I désigne le milieu de [AB].

1. (a) Justifier le fait qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme O en I et A en C .
- (b) Déterminer l'écriture complexe de s . En déduire les éléments caractéristiques de s et, en particulier, établir que l'affixe du centre Ω de s vaut $\frac{1+3i}{5}$.
- (c) Vérifier par un calcul que Ω est situé sur le cercle Γ de centre A passant par O .
2. Soit f l'application du plan complexe d'écriture complexe

$$z \mapsto \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{8+4i}{5}.$$

- (a) Déterminer les images par f des points A et C . En déduire la nature précise de f , puis démontrer que I est l'image de Ω par la symétrie orthogonale d'axe (AC) .
- (b) Construire le cercle Γ sur le dessin et placer également le point Ω en utilisant les informations géométriques précédentes.
3. À tout point M d'image M' par s , on associe le point M'' défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\Omega M}$.
 - (a) Quel est le point Ω'' associé à Ω ?
 - (b) Construire avec soin le point A'' en laissant les traits de construction.
 - (c) On suppose maintenant que M a pour affixe z .
 Démontrer que M'' a pour affixe $z'' = iz + \frac{4+2i}{5}$.
 En déduire que M'' est l'image de M par une similitude dont on donnera les éléments caractéristiques.
 - (d) Déterminer et représenter sur le dessin l'ensemble Γ'' des points M'' lorsque M décrit le cercle Γ .

Annexe (exercice de spécialité)

