

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 1994 ☞

EXERCICE 1

5 points

À tout nombre complexe  $z$ , on associe le nombre complexe  $Z$  défini par :

$$Z = \frac{z-1+2i}{z-i} \quad (z \neq i).$$

1. Calculer  $Z$  pour, successivement :  $z = 1$ ,  $z = 1 - i$ .
2. On pose  $Z = x + iy$  et  $Z = X + iY$  ( $x, y, X, Y$  sont des nombres réels).
  - a. Calculer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
  - b. Déterminer l'ensemble  $E$  des points  $M$  d'affixe  $Z$  tels que  $Z$  soit un réel.
  - c. Déterminer l'ensemble  $F$  des points  $M$  d'affixe  $Z$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur.
  - d. Représenter les ensembles  $E$  et  $F$  dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
3. On note  $A$  le point d'affixe  $1 - 2i$ ,  $B$  le point d'affixe  $i$  et  $M$  le point d'affixe  $z$ . En considérant les vecteurs d'affixe  $z - 1 + 2i$  et  $z - i$ , exprimer un argument de  $Z$ .  
Retrouver géométriquement les résultats des questions 2. b. et 2. c.

EXERCICE 2

5 points

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$ , dont l'hypoténuse mesure 4 cm. On désigne par  $O$  le milieu du segment  $[BC]$  et par  $(\Omega)$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

Soit  $I$  le milieu du segment  $[OA]$ .

À tout point  $M$  du plan, on associe les points  $P$  et  $Q$  définis par :

$$\vec{MP} = 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \quad \text{et} \quad \vec{MQ} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}.$$

1. Montrer que  $I$  est le barycentre des points  $A, B, C$  affectés respectivement des coefficients 2, 1, 1.
2. Exprimer  $\vec{IP}$  en fonction de  $\vec{IM}$ , puis  $\vec{MQ}$  en fonction de  $\vec{IA}$ .  
En déduire que les points  $P$  et  $Q$  sont les images respectives de  $M$  par une homothétie et une translation dont on précisera les éléments.
3. Dans cette question,  $M$  décrit le cercle  $(\Omega)$ .
  - a. Déterminer et construire les ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  que décrivent respectivement les points  $P$  et  $Q$ .
  - b. Montrer que le segment  $[PQ]$  conserve une longueur constante.
  - c. Montrer que le segment  $[PQ]$  contient toujours le point  $O'$  symétrique de  $O$  par rapport à  $A$ .

PROBLÈME

11 points

On considère les fonctions dépendant d'un entier naturel  $n$  et définies sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$\begin{cases} f_0(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \\ f_n(x) = \frac{x^n}{1+x+x^2} \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 1$$

On pose :  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

Dans la partie A, on étudie la fonction  $f_0$  et sa fonction dérivée.

Dans la partie B, on étudie la suite des nombres réels  $I_n$ .

### Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f_0$ .

Construire la courbe représentative de  $f_0$  dans un repère orthonormal (unité graphique : 6 cm) en précisant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

2. On note, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$  :  $f(x) = -f_0(x)$ . Calculer la fonction dérivée de  $f$  et montrer que  $f$  est décroissante sur  $[0; 1]$ .

En déduire que, pour tout  $x$  appartenant à  $[0; 1]$ , on a :  $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$ .

### Partie B

(On ne cherchera pas à calculer  $I_n$ )

1. Calculer :  $I_0 + I_1 + I_2$  et  $I_0 + 2I_1$ .
2. Étudier, pour tout entier  $n$  et pour  $x$  appartenant à  $[0; 1]$ , le signe de  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ .  
En déduire que la suite  $(I_n)$  est décroissante.

3. Montrer que, pour tout entier  $n$  et pour tout  $x$  appartenant à  $[0; 1]$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq x^n$ .

En déduire que :  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

Déterminer la limite de la suite  $(I_n)$

4. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier  $n$  :

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 f(x)x^{n+1} dx$$

( $f$  étant la fonction définie dans le A. 2.)

- b. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question A. 2, montrer que, pour tout entier  $n$  :

$$\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 f(x)x^{n+1} dx \leq \frac{1}{n+2}$$

puis que :

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

- c. À partir de quel entier  $n_0$  cet encadrement conduit-il à une valeur approchée au centième près de  $I_n$  ?

- d. Déterminer alors la valeur approchée au centième près de  $I_n$  pour  $n = n_0$ .