Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 1997

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune 2 boules indiscernables.
Dans U_1 une boule est marquée G, l'autre est marquée A; dans U_2 une boule est marquée 3, l'autre est marquée 5; dans U_3 une boule est marquée $\frac{1}{2}$, l'autre est marquée 2.
Une épreuve E consiste à tirer au hasard une boule dans chaque urne. On définit une suite u de la façon suivante :
si la boule tirée dans U_1 est marqué A, la suite est arithmétique, si elle est marquée G, la suite est géométrique; la boule tirée dans U_2 désigne le premier terme u_0 et la boule tirée dans U_3 désigne la raison.

1. Calculer la probabilité d'avoir :
   - **a.** une suite u arithmétique;
   - **b.** une suite u convergente;
   - **c.** une suite u telle que u_4 soit un nombre entier pair.
2. Calculer la probabilité d'avoir une suite u qui ne soit pas convergente sachant qu'elle est géométrique.
3. Un joueur tire une boule dans chaque urne et définit ainsi une suite numérique u :
   — si u est géométrique, il gagne 5 F;
   — si u est arithmétique et $u_4 \leqslant 7$, il perd 4 F;
   — si u est arithmétique et $u_4 > 7$, il perd 6 F.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain (algébrique) du joueur :
   — donner la « loi de probabilité » de X;
   — calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de centre O tel que AB = 6 cm et $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$. On définit les points P, Q, R, S de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

Le but de l'exercice est de préciser la nature du quadrilatère PQRS *en utilisant deux méthodes différentes.*
Placer les points P, Q, R et S sur une figure.

1. Première méthode : utilisant les nombres complexes

   On considère le repère orthonormal $\left(A,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, les vecteurs unitaires étant respectivement colinéaires et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, l'unité étant le cm.
   - **a.** Déterminer les affixes a, b, c, d respectives des points A, B, C, D.
     Calculer les affixes p, q, r, s respectives des points P, Q, R, S.
   - **b.** Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{SR}$, puis le quotient $\dfrac{s-p}{q-p}$.
   - **c.** Interpréter géométriquement ces résultats et en déduire la nature du quadrilatère PQRS?
2. **Deuxième méthode : géométrique**

   On note f la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer les images par f de A et B. Montrer que l'image de P par f est le point Q.

b. Déterminer les images de Q, R et S par f.

c. En utilisant ce qui précède, préciser et justifier la nature du quadrilatère PQRS.

PROBLÈME **11 POINTS**

Partie A : étude d'une fonction numérique

On considère la fonction numérique définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan, l'unité graphique est 1 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$, [on pourra écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x\mathrm{e}^{x} + 1\right)$].
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
4. Tracer D et $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie B : Étude d'une transformation du plan

Soit l'application r du plan (P) dans lui-même qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z.$$

1. Calculer le module et l'argument de $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et reconnaître r.
2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ où x, y, x' et y' sont quatre réels. Calculer z en fonction de z'. En déduire x et y en fonction de x' et y'.
3. On suppose que le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ appartient à $\mathscr{C}$, montrer que les coordonnées x' et y' de M' image de M par r vérifient la relation :

$$y' = -x' + \sqrt{2}\ln\left(x\sqrt{2}\right).$$

Partie C : Étude d'une fonction numérique

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = -x + \sqrt{2}\ln\left(x\sqrt{2}\right).$$

Soit $\mathscr{C}'$ sa représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g.
3. En utilisant éventuellement les résultats obtenus dans la partie B, tracer la courbe $\mathscr{C}'$ dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie D : Calcul d'aire

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \ln\left(x\sqrt{2}\right)\,\mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.
2. Soit D l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant y \leqslant f(x).$$

   Calculer en cm^2 l'aire du domaine D ; on en donnera une valeur approcheée à 10^{-2}.