∽ Baccalauréat Antilles–Guyane juin 1956 ∾
Série mathématiques et mathématiques et technique

I. 1[er] sujet

$u(x)$ étant une fonction de la variable x, définie, continue, dérivable et positive dans l'intervalle $(a\ ;\ b)$, montrer que la fonction $y = \sqrt{u(x)}$ de la variable x est une fonction dérivable dans le même intervalle.
Si $u'(x)$ désigne la dérivée de $u(x)$, quelle est la fonction dérivée de $y = \sqrt{u(x)}$?
Application : dérivée de $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

I. 2[e] sujet

Résoudre un triangle dont on donne deux côtés et l'angle qu'ils forment.
Application numérique :

$$b = 2{,}451\,8, \quad \mathrm{A} = 26{,}753\,7, \quad c = 5{,}432\,5.$$

(Les mesures des côtés b et c sont exprimées en mètres, celle de l'angle A en grades.)

I. 3[e] sujet

x étant la mesure d'un angle exprimée en radians, ou en degrés, ou en grades :

1. Déterminer la limite du rapport $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers zéro.
2. La fonction $y = \sin x$ est dérivable. Quelle est sa fonction dérivée ?
   On admettra que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont continues pour toute valeur de la variable x.

II.

Soit une droite fixe (D) d'un plan (P). On appelle conique (E) toute conique située dans (P), de directrice (D), de centre ω quelconque et de distance focale $2c$ telle que $4c = d$. [$d = \mathrm{H}\omega$, distance non nulle du point ω à la droite (D).]
F désigne le foyer correspondant à (D), F$'$ l'autre foyer, e l'excentricité.

Partie A

1. Construire géométriquement le cercle principal d'une conique (E) de centre ω donné.
   Calculer l'excentricité e ; dépend-elle de la position de ω ?
   Etablir que deux quelconques de ces coniques se correspondent soit dans un déplacement, soit dans une homothétie.
   On précisera les éléments de ces transformations (nature, point double, rapport, ...).
2. Soient F_1 et F_2 les foyers correspondant à la directrice (D) de deux de ces coniques.
   Montrer que le problème de la recherche des points communs à ces deux courbes peut être remplacé par celui de l'intersection d'une ellipse et d'une droite.
   Discuter de l'existence et du nombre de ces points suivant les positions de F_2 supposant F_1 donné.
   Comment faut-il choisir F_2 pour que les deux coniques soient tangentes ?

Partie B

Dans la suite du problème, on considère uniquement les coniques (E) passant par un point M donné.

1. Quel est le lieu géométrique de leur foyer F ? Construire alors les centres de celles dont le foyer F$'$ se trouve sur une droite (S) donnée (ne pas discuter de la possibilité de ce problème).

2. (E) étant l'une des coniques passant par le point M donné situé à la distance $H_0M = \ell$ de (D), calculer la longueur du rayon vecteur MF′ en fonction de la constante ℓ et de $F'H = 5c$.

   Déterminer le lieu géométrique du foyer F′. [On montrera que c'est une conique de foyer M et de directrice parallèle à (D), on précisera la position de cette directrice et l'excentricité.]

   Indiquer alors une autre solution au problème de construction proposé à la question précédente.

   Discuter suivant le choix de la droite (S).

3. Une droite (T) quelconque passe par M. Existe-t-il des coniques (E) tangentes à (T) ?

   Construire leurs foyers pour une position donnée de (T).

   Établir que le cercle variable (F′), de centre F′ et de rayon $R = d$, est tangent à deux cercles fixes.

4. Quel angle doit faire un plan (Q) avec le plan (P) pour que les projections orthogonales des coniques (E) sur (Q) soient des cercles ?

   Un de ces plans contenant (D) est appelé (Q′). (E) se projette sur (Q′) suivant le cercle (μ).

   Lieu géométrique des centres des cercles (μ).

   En déduire que les coniques (E) sont tangentes à une ellipse, dont on donnera les principaux éléments (centre, excentricité, direction des directrices).