

∞ **Baccalauréat mathématiques élémentaires** ∞
Antilles-Guyane juin 1962

EXERCICE 1

Calculer les angles d'un triangle dont les côtés sont

$$a = 2\sqrt{2}, \quad b = 2\sqrt{3}, \quad c = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

EXERCICE 2

Un triangle ABC variable a le sommet A fixe, la droite qui porte BC fixe et l'angle (AB, AC) constant. B' étant le pied de la hauteur issue de B, montrer que B' est le transformé de B dans une similitude, que l'on précisera.

Quel est le lieu de B'? Le construire.

PROBLÈME

Partie A

Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires, $x'Ox$, $y'Oy$, on considère l'ellipse de grand axe $2a$ dont les foyers, F et F', ont pour coordonnées

$$x = \pm c \quad \text{et} \quad y = 0.$$

M étant un point quelconque de cette ellipse, d'abscisse x , et α l'angle F'MF, montrer que

$$\cos \alpha = \frac{c^2 x^2 - 2c^2 a^2 + a^4}{a^4 - c^2 x^2}.$$

En utilisant le résultat précédent, étudier l'intersection de l'ellipse et du cercle de diamètre FF' : existence; abscisses des points d'intersection; dans le cas où le cercle et l'ellipse sont tangents, préciser l'excentricité de l'ellipse et la position de ses directrices.

B

Dans la fraction

$$y = \frac{c^2 x^2 - 2c^2 a^2 + a^4}{a^4 - c^2 x^2}.$$

on prend $a = 1$, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Étudier les variations de y et tracer la courbe représentative (C) quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.
2. Par le point A de (C) d'abscisse 2 on fait passer une droite D, de pente m . Quelle est l'équation de cette droite?

Discuter le nombre de ses points d'intersection avec (C), suivant les valeurs de m .

3. Quand la droite D recoupe la courbe en deux points, M' et M'' , on appelle P le conjugué harmonique de A par rapport à M' et M'' .

Calculer les coordonnées de P et montrer que ce point est sur la courbe d'équation

$$y = \frac{2x^2 - 2x - 9}{2x - 3}$$

La tracer et préciser les arcs effectivement décrits par P.