Durée : 4 heures

Baccalauréat C Antilles-Guyane juin 1965

Série mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction

$$y = \cos x + \sin x$$

et tracer la courbe représentative, dans un repère orthonormé Ox, Oy.
Application : Discuter par rapport au paramètre m le nombre des racines de l'équation

$$\cos x + \sin x = m$$

comprises entre $-\pi$ et $+\pi$.

EXERCICE 2

On considère trois axes de coordonnées Ox, Oy et Oz, tels que le trièdre Oxyz soit trirectangle direct.
On considère les deux rotations de l'espace d'axes Ox et Oy et d'angles respectifs 2α et 2β, avec $0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi$ et $0 \leqslant 2\beta \leqslant \pi$.
On se propose d'étudier la transformation produit de ces deux rotations.

1. **a.** En considérant chaque rotation comme le produit de deux retournements, montrer que l'on peut faire en sorte que l'un des retournements soit commun.

   b. En conclure que le produit des deux rotations est une rotation autour d'un axe Δ passant par O. Construire cet axe.

   c. Montrer que, dans le cas général, un système de paramètres directeurs de cet axe Δ est

   $$(1) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \beta,\\ b &=& \alpha,\\ c &=& -1\end{array}\right.$$

   (Pour cela, on pourra utiliser le produit scalaire.)
   Quels sont les cas particuliers auxquels les formules (1) ne s'appliquent pas ?

   d. Montrer que l'angle 2θ de la rotation produit est tel que

   $$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta.$$

   À quelle condition le produit est-il un retournement ?

   e. Lieu de Δ si β varie, α restant fixe.

2. **a.** L'axe Δ coupe le plan (P) d'équation $z = -1$ en un point M, dont on donnera les coordonnées en fonction de α et β.
   Si β varie, α restant fixe, quel est le lieu de M ?
   Retrouver ainsi le résultat du 1 e.

   b. On suppose que $\alpha + \beta = \dfrac{\beta}{2}$. Quel est alors le lieu de M ?

c. On suppose que $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que le lieu de M est alors, dans le plan de (P), une courbe (C) qui se projette sur le plan $x\mathrm{O}y$ suivant une portion de la courbe d'équation

$$y^2 - 2xy - 1 = 0.$$

Construire cette courbe.

d. On considère la surface engendrée par (Δ) quand M décrit la courbe (C). Le plan (Q) d'équation $y = 1$ coupe cette surface suivant une courbe $\left(C'\right)$. Construire la projection de $\left(C'\right)$ sur le plan $x\mathrm{O}z$.