Baccalauréat mathématiques élémentaires Antilles–Guyane septembre 1964

EXERCICE 1

Déterminer le module et l'argument de

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}.$$

Calculer $u = z^{32}$.

EXERCICE 2

Soit G l'ensemble formé par les rotations planes de centre O et les symétries par rapport aux droites passant par O.
Montrer que la loi (notée $\circ$) « produit de deux de ces transformations » détermine, sur G, une structure de groupe.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé, $X'\mathrm{O}X$, $Y'\mathrm{O}Y$.
Sur le cercle orienté de centre O et de rayon R on considère les deux points, M_1 et M_2, définis par

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{O}X}, \overrightarrow{\mathrm{OM}_1}\right) = \theta_1 \quad (\text{mod.}\, 2\pi) \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{O}X}, \overrightarrow{\mathrm{OM}_2}\right) = \theta_2 \quad (\text{mod.}\, 2\pi).$$

Soient $\overrightarrow{t_1}$ et $\overrightarrow{t_2}$ les vecteurs unitaires des tangentes au cercle en M_1 et M_2 définis respectivement par

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_1}, \overrightarrow{t_1}\right) = +\frac{\pi}{2} \quad (\text{mod.}\, 2\pi), \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}, \overrightarrow{t_2}\right) = +\frac{\pi}{2} \quad (\text{mod.}\, 2\pi).$$

Partie A

1. Écrire les coordonnées des points M_1 et M_2 et les composantes des vecteurs $\overrightarrow{t_1}$ et $\overrightarrow{t_2}$.
2. Déterminer l'équation de la droite $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$.
3. Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ et de la somme $\left(\overrightarrow{t_1} + \overrightarrow{t_2}\right)$.
4. Montrer que ces deux vecteurs sont colinéaires. (On pourra introduire les arcs $\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$ et $\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}$ et montrer que les composantes de ces deux vecteurs sont proportionnelles, ou donner une démonstration géométrique.)

Partie B

On suppose maintenant M_1 et M_2 variables sur le cercle (C) de telle façon que

$$\theta_1 = \omega_1 t + \varphi_1 \quad \text{et} \quad \theta_2 = \omega_2 t + \varphi_2.$$

($\omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$ sont des constantes, t représente le temps).

1. Déterminer les vecteurs vitesse, $\overrightarrow{\mathrm{V}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{V}_2}$, des points M_1 et M_2.
   Exprimer ces deux vecteurs en fonction de R, $\omega_1, \omega_2, \overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2}$.
2. Soit G le barycentre des points M_1 et M_2 affectés *respectivement* des coefficients ω_2 et ω_1 (on notera l'inversion des indices).
   Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ et les coordonnées du point G.

3. Déterminer le vecteur vitesse de G ; l'exprimer en fonction de ω_1, ω_2, R et de la somme $\overrightarrow{t_1} + \overrightarrow{t_2}$.
4. Montrer, en tenant compte de la partie A, que le vecteur vitesse de G et $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ ont même direction.

Partie C

On suppose maintenant

$$\omega_2 = -3\omega_1, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \mathrm{R} = \frac{a}{2}.$$

1. Déterminer l'expression de $\cos^3 t$ et $\sin^3 t$ en fonction linéaire des lignes trigonométriques de t et $3t$.
2. Écrire, avec les valeurs particulières données, les coordonnées du point G. Montrer qu'elles s'expriment sous la forme de puissances de $\cos \omega_1 t$ et $\sin \omega_1 t$.
3. Étudier en fonction de t les variations des coordonnées, x et y, de G (on ne tracera pas la courbe représentative).
4. Quelle conséquence implique la conclusion de la deuxième partie pour la détermination de l'enveloppe de la droite $\mathrm{M_1M_2}$?