

∞ Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2001 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète 10 euros un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.

Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 100 euros avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.

G désigne l'évènement : « Le joueur gagne au grattage ».

Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 100 euros, ou 200 euros, ou bien ne rien gagner.

L_1 désigne l'évènement « Le joueur gagne 100 euros à la loterie ».

L_2 désigne l'évènement « Le joueur gagne 200 euros à la loterie ».

P désigne l'évènement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 euros à la loterie est $\frac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 euros à la loterie est $\frac{1}{490}$.

- Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.
 - Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.
 - Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.
- On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

La probabilité de l'évènement « $X = 90$ » est $\frac{2}{125}$.

La probabilité de l'évènement « $X = 190$ » est $\frac{1}{250}$.

- Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage, est égale à $\frac{1}{10}$.
- Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage.
- Déterminer la loi de probabilité de X .
Calculer l'espérance de X .

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par $M(z)$ le point M ayant pour affixe z .

- Placer sur une figure les points $A(2 + i)$, $B(2i)$, $C(-4 + 3i)$ et $D(-8)$, en prenant 1 cm pour unité graphique.
- Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

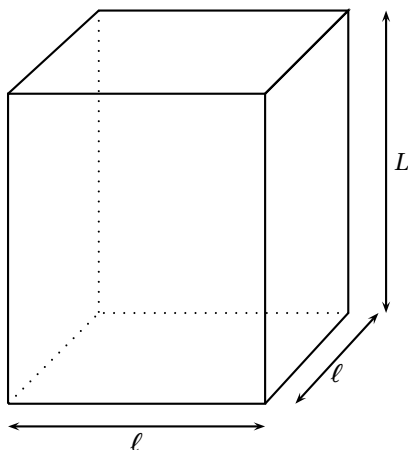
$$z' = (1 + 2i)z - 4 - 2i.$$

- a. Préciser les images des points A et B par f .
 - b. Montrer que f admet un unique point fixe Ω , dont on précisera l'affixe ω (M est un point fixe pour f si, et seulement si, $f(M) = M$).
3. On admet que $\omega = 1 - 2i$. Soit M un point quelconque et M' son image par f .
- a. Montrer que, pour tout complexe z on a : $z' - z = 2i(w - z)$.
Dans toute la suite, M est différent de Ω .
 - b. Dédire de la question précédente le rapport des distances $\frac{MM'}{\Omega M}$, et l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.
 - c. Dédire des questions précédentes une construction géométrique du point M' , connaissant le point M .
Réaliser cette construction sur la figure de la question 1)

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L , à base carrée de côté ℓ , où ℓ et L sont des entiers naturels non nuls tels que $\ell < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).
 - a. Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?
Quelles sont les valeurs possibles pour a ?
 - b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.
2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question 1 (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).
 - a. Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C?
Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?
 - b. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
Quelles sont les dimensions ℓ et L de la boîte B?

PROBLÈME
Commun à tous les candidats

11 points

Partie A

★ **Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$**

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$u(x) = (ax + b)e^x.$$

- a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
 - b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u + v$ est solution de (1).
 - c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B

★ **Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
 - a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
 - b. L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Partie C

★ **Étude de la fonction principale**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
(On pourra mettre e^{2x} en facteur.)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Étudier le sens de variation de f
3. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est défini dans la partie B.
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
(On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.)
4. Établir le tableau de variations de f
5. Tracer la courbe (\mathcal{C}), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie D**★ Calcul d'aire**

1. Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x) dx$. (On justifiera la réponse.)
2.
 - a. Calculer $\int_m^0 xe^x dx$, à l'aide d'une intégration par parties.
 - b. En déduire $\int_m^0 f(x) dx$.
3. Calculer la limite de $\int_m^0 f(x) dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.