Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2000

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Pour tout nombre complexe z, on considère

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

   a. Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(\text{i}b)$. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

   b. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = \left(z^2 + 9\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

2. Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal.

   a. Placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3\text{i}$, $b = -3\text{i}$, $c = 5 + 2\text{i}$ et $d = 5 - 2\text{i}$.

   b. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

   c. Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} + \overrightarrow{M\text{D}}\right\| = 10.$$

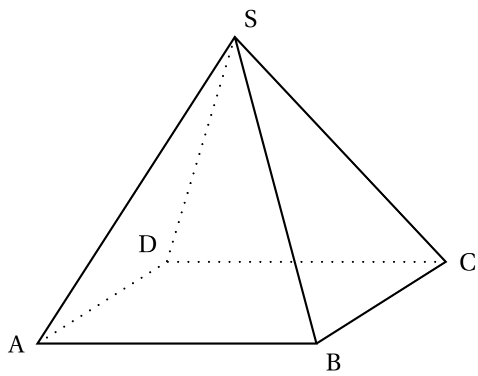
   Tracer E sur la figure précédente.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.
Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- en A ?
- en B ?
- en C ?
- en D ?



b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :
S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet évènement.
Donner p_1.
En remarquant que $\text{S}_{n+1} = \text{S}_{n+1} \cap \overline{\text{S}_n}$, montrer que

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 - p_n\right).$$

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier n strictement positif par : $\left\{\begin{array}{lcl} p_1 & = & \frac{1}{3} \\ p_{n+1} & = & \frac{1}{3}\left(1 - p_n\right) \end{array}\right.$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

PROBLÈME **12 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln\left(1+2e^x\right).$$

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Donner le signe de $g(x)$.

B. Étude d'une fonction et calcul d'une aire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-2x}\ln\left(1+2e^x\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que :

   $$\text{si on pose } X = 1+2e^x,\ f(x) \text{ s'écrit } 4\frac{X}{(X-1)^2}\frac{\ln X}{X}.$$
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer $\mathcal{C}$.
5. Soit α un réel strictement positif.

   a. Vérifier que, pour tout réel x, $\dfrac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$.

   En déduire la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x}\,dx$.

   b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

   $$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,dx.$$

   Donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

C. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}.$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **B)** est solution de (E).

2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}') \ : \ y' + 2y = 0.$$

3. Résoudre (E′) et en déduire les solutions de (E).