# Baccalauréat S Asie juin 2000

**Exercice 1** 4 points

**Commun à tous les candidats**

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$ . Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier naturel $n$ strictement positif, on considère les évènements suivants :

$A_n$ : « Alice atteint la cible au $n^{\text{e}}$ coup ».

$B_n$ : « Alice rate la cible au $n^{\text{e}}$ coup ».

On pose $P_n = p(A_n)$.

Pour les questions **1.** et **2.** on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer $p_1$ et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}.$$

3. Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme $u_1$ et la raison $q$.
4. Écrire $u_n$ puis $p_n$ en fonction de $n$.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

**Exercice 2** 5 points

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe $(P)$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_\text{A} = -\text{i}\ ;\ z_\text{B} = 3\ ;\ z_\text{C} = 2+3\text{i} \quad \text{et} \quad z_\text{D} = -1+2\text{i}.$$

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.
2. **a.** Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\dfrac{z_\text{C} - z_\text{A}}{z_\text{D} - z_\text{B}}$.

   **b.** Calculer le complexe $\dfrac{z_\text{C} - z_\text{A}}{z_\text{D} - z_\text{B}}$.

   **c.** Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?
3. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

   **b.** Calculer l'aire $s_0$ du quadrilatère ABCD.
4. **a.** Placer sur la figure précédente les points $\text{A}_1$, $\text{B}_1$, $\text{C}_1$ et $\text{D}_1$ tels que $\overrightarrow{\text{DA}_1} = \overrightarrow{\text{A}_1\text{B}_1} = \overrightarrow{\text{B}_1\text{C}}$, où les points $\text{A}_1$ et $\text{B}_1$ appartiennent à [DC], le quadrilatère $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ étant un carré situé à l'extérieur du quadrilatère ABCD.

   **b.** Tracer le carré $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ et déterminer son aire $s_1$.
5. **a.** On continue par le même procédé : un carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$ étant déterminé, on considère les points $\text{A}_{n+1}$, $\text{B}_{n+1}$, $\text{C}_{n+1}$ et $\text{D}_{n+1}$ tels que $\overrightarrow{\text{D}_n\text{A}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{B}_{n+1}\text{C}_n}$ où les points $\text{A}_{n+1}$ et $\text{B}_{n+1}$ appartiennent à $[\text{D}_n\text{C}_n]$, le quadrilatère $\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}\text{C}_{n+1}\text{D}_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$.
   Tracer le carré $\text{A}_2\text{B}_2\text{C}_2\text{D}_2$.

**b.** Soit $s_n$ l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$.
Exprimer $s_{n+1}$ en fonction de $s_n$, puis de $n$.
En déduire $s_n$ , en fonction de $n$.

**c.** Déterminer, en fonction de $n$, l'aire $S_n$ de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère ABCD et des carrés $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ... et $A_nB_nC_nD_n$.

**d.** La suite $(s_n)$ est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

**Exercice 2** 5 points
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. Déterminer PGCD(2 688 ; 3 024).
2. Dans cette question, $x$ et $y$ sont deux entiers relatifs.
   **a.** Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes
   (1) $2688x + 3024y = -3360$ ;
   (2) $8x + 9y = -10$.
   **b.** Vérifier que $(1 ; -2)$ est une solution particulière de l'équation (2).
   **c.** Déduire de ce qui précède les solutions de (2).
3. Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
   On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives
   $$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$
   **a.** Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).
   **b.** Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).
   **c.** En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

**Problème** 11 points

**Partie A**

**Étude d'une fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ ; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de $(\mathscr{C})$.
2. Étudier le sens de variation de $f$. Dresser le tableau de variation de $f$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\text{e}}~;~1\right]$ une solution unique, notée $\alpha$.
   Déterminer un encadrement de $\alpha$, d'amplitude $10^{-2}$.
   Donner, suivant les valeurs de $x$, le signe de $f(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

**Partie B Calcul d'aire**

1. Déterminer une équation de la tangente $(D)$ à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
2. **a.** Soit $\varphi$ la fonction définie, pour tout $x > 0$, par :

   $$\varphi(x) = x - x^2 + \ln x.$$

   Calculer $\varphi'(x)$.
   En déduire le sens de variation de $\varphi$, puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   **b.** Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

   **c.** En déduire la position relative de $(\mathscr{C})$ et de $(D)$.
3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente $(D)$.

   **a.** Hachurer ce domaine.

   **b.** Soit $\mathscr{A}$ son aire, en cm$^2$. Écrire la valeur exacte de $\mathscr{A}$ comme expression polynomiale du second degré en $\alpha$.

**Partie C Étude d'une suite**

Soit $x_0$ un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{\text{e}}~;~\alpha\right]$. On note $M_0$ le point de $(\mathscr{C})$d abscisse $x_0$.

1. **a.** Donner une équation de la tangente $(T_0)$ à $(\mathscr{C})$ en $M_0$, en fonction de $x_0$, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

   **b.** Soit $x_1$ l'abscisse du point d'intersection de $(T_0)$ avec l'axe des abscisses. Écrire $x_1$ en fonction de $x_0$, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
2. On considère la fonction $h$ définie sur $\left]\frac{1}{\text{e}}~;~\alpha\right]$ par :

   $$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.\text{ (On remarquera que } h(x_0) = x_1\text{).}$$

**a.** Montrer que $h'(x) = \dfrac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}$.

**b.** Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$.

**c.** En déduire que $h$ est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.

**d.** En écrivant $h(x) - x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$

En déduire que $\dfrac{1}{\text{e}} < x_0 < x_1 < \alpha$.

**3. a.** Démontrer que, pour tout $x$ appartenant à $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$, $h(x)$ appartient à $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$.

**b.** On considère la suite $(x_n)$ de réels définie par $x_0$ et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel $n$.

Montrer que la suite $(x_n)$ est strictement croissante.