

☞ Baccalauréat C Asie¹ juin 1984 ☞

EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) d'axes $(x'x)$ et $(y'y)$. A est le point d'affixe $2i$.

f est l'application de $P - \{A\}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe

$$Z' = \frac{2iZ - 5}{Z - 2i}.$$

1. Montrer qu'il existe deux points B et C invariants par f .
2. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
3. Montrer que la droite $(y'y)$ privée du point A est globalement invariante par f .
4. Montrer que si $Z \neq 2i$, $|Z' - 2i| \cdot |Z - 2i| = 9$.
En déduire l'image par f du cercle Γ de centre A et de rayon r .
Déterminer r pour que Γ soit invariant par f .

EXERCICE 2

4 POINTS

A, B, C et D sont quatre points non coplanaires de l'espace. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

m étant un réel non nul, G_m est le barycentre des quatre points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients $1; 1; m-2$ et m .

1. On construit G_m dans deux cas particuliers.
 - a. Construire G_2 ($m = 2$).
 - b. Construire G_1 ($m = 1$).
 - c. En déduire que G_2 est le milieu du segment $[G_1J]$.
2. Montrer que

$$\vec{IG}_m = \frac{(m-2)\vec{IC} + m\vec{ID}}{2m}.$$

En déduire que l'ensemble S des points G_m , lorsque m décrit \mathbb{R} , est inclus dans un plan que l'on précisera.

3. Montrer que $m\vec{JG}_m$ est un vecteur constant. En déduire l'ensemble S .

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

-
1. Australie, Hong-Kong, Japon

Soit f la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telle que

$$f(x) = x - 1 - \ln|x|,$$

où \ln est le logarithme népérien.

On note f_0 et f_1 les restrictions de f sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* respectivement.

On note γ , γ_0 et γ_1 leurs courbes représentatives respectives dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé.

1. a. Pour chaque réel k , on considère la droite D_k d'équation $y = x + k$.
Montrer que D_k coupe γ en deux points d'abscisses opposées.
En déduire que γ_0 et γ_1 s'échangent dans une symétrie S que l'on précisera.
- b. On considère deux points P et Q sur γ , d'abscisses respectives x et $\frac{1}{x}$, puis leur milieu I .
Montrer que I est situé sur une des droites D_k que l'on précisera.
- c. Étudier les variations de f et construire γ .
2. a. Démontrer que f_1 est une bijection de \mathbb{R}_-^* vers \mathbb{R} . En déduire que f_1 possède un unique zéro noté ici x_1 .
- b. Calculer $\ln|x_1|$ en fonction de x_1 .
Donner une valeur approchée de x_1 à $\frac{1}{10}$ près.
- c. La courbe représentative de f_1^{-1} dans (O, \vec{i}, \vec{j}) s'obtient à partir de γ_0 par la transformation ponctuelle T composée de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à D_0 , et d'une autre symétrie S' que l'on précisera.
Montrer que les expressions analytiques de T sont

$$x' = y - 2x \quad \text{et} \quad y' = -x.$$

3. a. On considère la fonction φ de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} telle que

$$\varphi(x) = x \ln x.$$

Déterminer φ' , dérivée de φ .

- b. En déduire une primitive de f_0 .
- c. Le plan étant rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , évaluer l'aire de la partie du plan définie par

$$\begin{cases} \frac{1}{e} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

Partie B

Soit g la fonction numérique définie par

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x \ln|x|}{x-1}, & \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}, \\ g(0) = 0 \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

1. La fonction g est-elle continue en 0? Est-elle continue en 1?
2.
 - a. La fonction g est-elle dérivable en 0?
 - b. La fonction g est-elle dérivable en 1? (on utilisera un développement limité en 0, d'ordre 2, de $\ln(1+h)$).
 - c. À l'aide du signe de f (partie A), étudier les variations de la fonction g .
3.
 - a. On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g et E le point de \mathcal{C} d'abscisse (-1) . Déterminer une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point E.
 - b. Préciser la position relative de cette tangente et de la courbe \mathcal{C} au voisinage du point E. (On pourra poser $x = -1 - h$ et utiliser un développement limité, au voisinage de 0, de $\ln(1+h)$).
 - c. Construire la courbe \mathcal{C} .