Durée : 4 heures

Baccalauréat C Asie juin 1991

EXERCICE 1 **4 points**

Soit l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = 0. \quad \text{(E)}$$

1. Déterminer les solutions f et g de l'équation (E), telles que :

$$\begin{array}{lcl} f(0) = 5 & \text{et} & f'(0) = 0 \\ g(0) = 0 & \text{et} & g'(0) = 8. \end{array}$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on désigne par (C) la courbe d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & f(t) \\ y & = & g(t) \end{array}\right.$$

où le réel t décrit $\mathbb{R}$.
Quelle est la nature de la courbe (C) ?
La construire après avoir préciser ses éléments caractéristiques : sommets, foyers, excentricité.

EXERCICE 2 **4 points**

L'unité est le cm.
On donne dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 8 et AC = 4.

1. Construire le barycentre G des points A, B, C respectivement affectés des coefficients 3, −1 et 2.
2. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan vérifiant :

$$3M\text{A}^2 - M\text{B}^2 + 2M\text{C}^2 = -32.$$

3. Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan vérifiant :

$$\left\|3\,\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\,\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\|$$

PROBLÈME **12 points**

I- Étude d'une fonction numérique. Tracé de courbes

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f, le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 3 cm.

1. **a.** Étudier le sens de variation de f.
   b. Donner une équation de la tangente $(\mathscr{D})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.

c. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente $(\mathscr{D})$.

2. En étudiant la fonction numérique g définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x - f(x)$$

montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique α, et que α appartient à l'intervalle $[1~;3]$.

II- Résolution approchée d'une équation. Calcul d'aire

1. On définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f\left(u_n\right),$$

où f est la fonction définie dans la partie I.
Démontrer les résultats suivants :

a. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et croissante ;

b. pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$;

c. pour tout x de l'intervalle $[1~;~+\infty[$, on a $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$;

d. pour tout entier naturel n, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

(α est le réel défini à la question I. 2.) ;
Pour tout entier n, on a :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

e. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α ;

f. u_{11} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Donner, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée β de u_{11} à 10^{-3}.

3. Calculer, l'aire en cm^2 de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x~;~y)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & \alpha \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x). \end{array}\right.$$

(On utilisera vu une intégration par parties.)
On donnera pour cette aire la valeur exacte en faisant intervenir α, puis une valeur approchée obtenue en remplaçant α par le nombre β trouvé en II. 2.

III- Étude d'une famille de courbes et d'une suite de réels

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 1, on considère la fonction f_p définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f_p \quad : x \longmapsto f_p(x) = 1 + \ln(x + p).$$

On appelle $\left(\mathscr{C}_p\right)$ la courbe représentative de f_p.

1. **1.** Dresser le tableau de variations de f_p.
   Étudier les positions relatives de $\left(\mathscr{C}_p\right)$ et $\left(\mathscr{C}_{p+1}\right)$.
2. **2.** Le graphique ci-dessous, à rendre avec la copie, représente les courbes $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$, $(\mathscr{C}_{10})$, $(\mathscr{C}_{20})$ et $(\mathscr{C}_{50})$. Le compléter par le tracé de $(\mathscr{C}_1)$ et celui de la droite (Δ)d'équation cartésienne $y = x$.
3. **3.** Étudier pour tout entier p supérieur ou égal à 1, le sens de variation de la fonction g_p définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g_p \quad : x \longmapsto g_p(x) = x - f_p(x).$$

   Déduire de cette étude l'existence d'une solution unique α_p pour l'équation $x = f_p(x)$, et le signe de g_p.
4. **4.** On désigne par P le point de $(\mathscr{C}_1)$ d'abscisse α_1, par Q le point de $(\mathscr{C}_2)$ d'abscisse α_1, par R le point de $(\mathscr{C}_1)$ d'abscisse α_2.
   Placer ces points sur le graphique complété à la question III. 2.
   Comparer les ordonnées de P et Q.
   Quel est le signe de $g_2(\alpha_1)$? En déduire, en utilisant III. 3, que $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$.
   Prouver de la même manière la croissance de la suite $\left(\alpha_p\right)_{p\geqslant 1}$.
5. **5.** Établir l'inégalité $\alpha_p \geqslant 1 + \ln p$.
   Quelle est la limite de la suite $\left(\alpha_p\right)_{p\geqslant 1}$?

Document réponse à compléter et à remettre avec la copie