Baccalauréat C Asie [1] juin 1984

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'axes $(x'x)$ et $(y'y)$. A est le point d'affixe 2i.

f est l'application de P $-\{A\}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $Z' = \dfrac{2\mathrm{i}Z-5}{Z-2\mathrm{i}}$.

1. Montrer qu'il existe deux points B et C invariants par f.
2. Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.
3. Montrer que la droite $(y'y)$ privée du point A est globalement invariante par f.
4. Montrer que si $Z \neq 2\mathrm{i}$, $\left|Z'-2\mathrm{i}\right| \cdot |Z-2\mathrm{i}| = 9$.
   En déduire l'image par f du cercle Γ de centre A et de rayon r.
   Déterminer r pour que Γ soit invariant par f.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

A, B, C et D sont quatre points non coplanaires de l'espace. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

m étant un réel non nul, G_m est le barycentre des quatre points A, B, C et D affectés respectivement des coefficients 1 ; 1 ; $m-2$ et m.

1. On construit G_m dans deux cas particuliers.
   a. Construire G_2 $(m=2)$.
   b. Construire G_1 $(m=1)$.
   c. En déduire que G_2 est le milieu du segment $[G_1\mathrm{J}]$.
2. Montrer que
   $$\overrightarrow{\mathrm{I}G_m} = \frac{(m-2)\overrightarrow{\mathrm{IC}} + m\overrightarrow{\mathrm{ID}}}{2m}.$$
   En déduire que l'ensemble S des points G_m, lorsque m décrit $\mathbb{R}$, est inclus dans un plan que l'on précisera,
3. Montrer que $m\overrightarrow{\mathrm{J}G_m}$ est un vecteur constant. En déduire l'ensemble S.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = x - 1 - \ln|x|,$$

où ln est le logarithme népérien.

On note f_0 et f_1 les restrictions de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_-^\star$ respectivement.

On note γ, γ_0 et γ_1 leurs courbes représentatives respectives dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ orthonormé.

1. Australie

1. **a.** Pour chaque réel k, on considère la droite D_k d'équation $y = x + k$.
   Montrer que D_k coupe γ en deux points d'abscisses opposées.
   En déduire que γ_0 et γ_1 s'échangent dans une symétrie S que l'on précisera.

   b. On considère deux points P et Q sur γ, d'abscisses respectives x et $\dfrac{1}{x}$, puis leur milieu I.
   Montrer que I est situé sur une des droites D_k que l'on précisera.

   c. Étudier les variations de f et construire γ.

2. **a.** Démontrer que f_1 est une bijection de $\mathbb{R}_-^\star$ vers $\mathbb{R}$. En déduire que f_1 possède un unique zéro noté ici x_1.

   b. Calculer $\ln|x_1|$ en fonction de x_1.
   Donner une valeur approchée de x_1 à $\dfrac{1}{10}$ près.

   c. La courbe représentative de ${f_1}^{-1}$ dans $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ s'obtient à partir de γ_0 par la transformation ponctuelle T composée de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées parallèlement à D_0, et d'une autre symétrie S' que l'on précisera.
   Montrer que les expressions analytiques de T sont

$$x' = y - 2x \quad \text{et} \quad y' = -x.$$

3. **a.** On considère la fonction φ de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(x) = x\ln x.$$

   Déterminer φ', dérivée de φ.

   b. En déduire une primitive de f_0.

   c. Le plan étant rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, évaluer l'aire de la partie du plan définie par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{\mathrm{e}} & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x). \end{array}\right.$$

Partie B

Soit g la fonction numérique définie par

$$\left\{\begin{array}{lcll} g(x) & = & \dfrac{x\ln|x|}{x-1}, & \forall x \in \mathbb{R} - \{0\ ;\ 1\}, \\ g(0) & = & 0 & \\ g(1) & = & 1 & \end{array}\right.$$

1. La fonction g est-elle continue en 0 ? Est-elle continue en 1 ?

2. **a.** La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

   b. La fonction g est-elle dérivable en 1 ? (on utilisera un développement limité en 0, d'ordre 2, de ln (1 + h)).

   c. À l'aide du signe de f (partie A), étudier les variations de la fonction g.

3. **a.** On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g et E le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse (-1). Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point E.

   b. Préciser la position relative de cette tangente et de la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage du point E. (On pourra poser $x = -1 - h$ et utiliser un développement limité, au voisinage de 0, de $\ln(1+h)$).

   c. Construire la courbe $\mathscr{C}$.