Durée : 4 heures

↫ Baccalauréat C Japon juin 1986 ↬

EXERCICE 1 **4 points**

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_{-\frac{4}{3}}^{-1} \frac{2x+1}{(3x+2)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Pour le calcul de I_2, on pourra effectuer un changement de variable affine.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 1 + x - \ln\left|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right|.$$

1. Montrer qu'on a pour tout x :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 1 - \ln\left|1 - \mathrm{e}^{1-x}\right| \\ f(x) & = & x - \ln\left|\mathrm{e}^{x-1} - 1\right| \end{array}$$

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que f définit une bijection g de $]1\,;\,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
Définir g^{-1} et vérifier que $g^{-1} = g$.

PROBLÈME **12 points**

Les diverses question sont, dans une large mesure, indépendantes

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

On se propose de tracer la courbe $\mathscr{C}$ ensemble des points du plan dont les coordonnées son définies en fonction de la variable réelle t par :

$$M(t) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 4\cos t \sin^2 t \\ y(t) & = & 4\sin t \cos^2 t \end{array} \right.$$

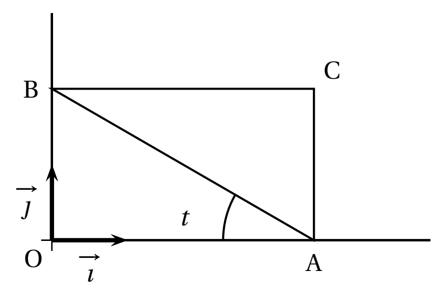
1. Préciser la transformation ponctuelle transformant, quel que soit le réel t, le point $M(t)$ en :
   a. Le point $M(t+2\pi)$.
   b. Le point $M(-t)$.
   c. Le point $M(\pi - t)$.
   d. Le point $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

   On appelle $\mathscr{C}_1$ la partie de $\mathscr{C}$ correspondant aux valeurs de t comprises entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Expliquer comment on peut déduire la courbe $\mathscr{C}$ de la courbe $\mathscr{C}_1$.

2. Étudier les variations de x et y sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, (on remarquera que y' s'annule pour une valeur t_0, que l'on ne cherchera pas à calculer, mais dont on donnera une valeur approchée).
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
   Préciser les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points de paramètres $t = 0$; $t = \dfrac{\pi}{4}$.
4. $z(t)$ étant l'affixe du point $M(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$, calculer en fonction de t, le module et un argument de $z(t)$.

Partie B

Soient A et B deux points du plan situés respectivement sur les demi-droites $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$, et $\left(\text{O},\ \vec{\jmath}\right)$ et tels que $d(\text{A, B}) = 4$.
On appelle C le point du plan tel que le quadrilatère OACB soit un rectangle.



t désigne une mesure de l'angle en A du triangle OAB, $t \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Soient P un point quelconque de la droite (AB) et Q le barycentre des points C et P affectés des coefficients -1 et 2.
   Quel est l'ensemble Δ des points Q lorsque P décrit la droite (AB) ?
2. La perpendiculaire en Q à Δ coupe la perpendiculaire en P à (CP) en un point S.
   a. Montrer que l'ensemble Γ des points S lorsque P décrit la droite (AB) est une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.
   b. Tracer Γ avec soin dans le cas où $t = \dfrac{\pi}{6}$; montrer que les droites $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$ et $\left(\text{O},\ \vec{\jmath}\right)$ sont tangentes à Γ.

Partie C

Dans cette partie les points A et B varient sur les demi-droites $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$ et $\left(\text{O},\ \vec{\jmath}\right)$, la longueur du segment AB restant constante égale à 4.

1. Quel est alors l'ensemble des points C ?
2. Soit M le projeté orthogonal de O sur la droite (AB). Calculer les coordonnées de M en fonction de t.
   En déduire que l'ensemble des points M est une partie de la courbe $\mathscr{C}$ tracée dans la partie A.