

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Japon juin 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx, \quad I_2 = \int_{-\frac{4}{3}}^{-1} \frac{2x+1}{(3x+2)^3} dx.$$

Pour le calcul de I_2 , on pourra effectuer un changement de variable affine.

EXERCICE 2

4 points

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 1 + x - \ln|e^x - e|.$$

1. Montrer qu'on a pour tout x :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \ln|1 - e^{1-x}| \\ f(x) &= x - \ln|e^{x-1} - 1| \end{aligned}$$

2. Dresser la tableau de variation de f .

3. Montrer que f définit une bijection g de $]1; +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera. Définir g^{-1} et vérifier que $g^{-1} = g$.

PROBLÈME

12 points

Les diverses questions sont, dans une large mesure, indépendantes

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

On se propose de tracer la courbe \mathcal{C} ensemble des points du plan dont les coordonnées sont définies en fonction de la variable réelle t par :

$$M(t) \quad \begin{cases} x(t) = 4 \cos t \sin^2 t \\ y(t) = 4 \sin t \cos^2 t \end{cases}$$

1. Préciser la transformation ponctuelle transformant, quel que soit le réel t , le point $M(t)$ en :

- Le point $M(t + 2\pi)$.
- Le point $M(-t)$.
- Le point $M(\pi - t)$.

d. Le point $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

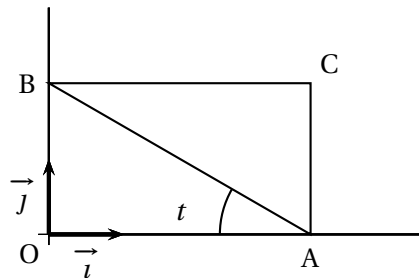
On appelle \mathcal{C}_1 la partie de \mathcal{C} correspondant aux valeurs de t comprises entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Expliquer comment on peut déduire la courbe \mathcal{C} de la courbe \mathcal{C}_1 .

2. Étudier les variations de x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, (on remarquera que y' s'annule pour une valeur t_0 , que l'on ne cherchera pas à calculer, mais dont on donnera une valeur approchée).
3. Tracer la courbe \mathcal{C} .
Préciser les tangentes à \mathcal{C} aux points de paramètres $t = 0$; $t = \frac{\pi}{4}$.
4. $z(t)$ étant l'affixe du point $M(t)$ de la courbe \mathcal{C}_1 , calculer en fonction de t , le module et un argument de $z(t)$.

Partie B

Soient A et B deux points du plan situés respectivement sur les demi-droites (O, \vec{i}) , et (O, \vec{j}) et tels que $d(A, B) = 4$.

On appelle C le point du plan tel que le quadrilatère OACB soit un rectangle.



t désigne une mesure de l'angle en A du triangle OAB, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Soient P un point quelconque de la droite (AB) et Q le barycentre des points C et P affectés des coefficients -1 et 2 .
Quel est l'ensemble Δ des points Q lorsque P décrit la droite (AB)?
2. La perpendiculaire en Q à Δ coupe la perpendiculaire en P à (CP) en un point S.
 - a. Montrer que l'ensemble Γ des points S lorsque P décrit la droite (AB) est une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.
 - b. Tracer Γ avec soin dans le cas où $t = \frac{\pi}{6}$; montrer que les droites (O, \vec{i}) et (O, \vec{j}) sont tangentes à Γ .

Partie C

Dans cette partie les points A et B varient sur les demi-droites (O, \vec{i}) et (O, \vec{j}) , la longueur du segment AB restant constante égale à 4.

1. Quel est alors l'ensemble des points C ?
2. Soit M le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) . Calculer les coordonnées de M en fonction de t .

En déduire que l'ensemble des points M est une partie de la courbe \mathcal{C} tracée dans la partie A.