Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Asie [1] juin 1994 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
Soit $\mathscr{C}$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \dfrac{1}{\cos\varphi}\\ y & = & \tan\varphi \end{array}\right.$$

φ appartient à l'union de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et de $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

1. **a.** Donnez les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de paramètre φ.

   b. Montrer qu'une équation cartésienne de la tangente T_{φ}, au point de paramètre φ est :

$$x - y\sin\varphi - \cos\varphi = 0.$$

2. Montrer que tout point de $\mathscr{C}$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$x^2 - y^2 = 1.$$

   On admettra que $\mathscr{C} = \mathscr{H}$.
   En déduire la nature de $\mathscr{C}$. Préciser son centre, ses sommets, ses foyers F et F$'$ et ses asymptotes. Construire $\mathscr{C}$ et la tangente T_{φ}.

3. Soient K et K$'$ les projections orthogonales respectives des foyers F et F$'$ sur la tangente T_{φ}.
   Calculer FK et F$'$K$'$ en fonction de φ et vérifier que $\text{FK}\cdot\text{F}'\text{K}' = 1$.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, soit ABC un triangle tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AC}}\right)$ ait pour mesure α appartenant à $]0\,;\,\pi[$.
On construit extérieurement au triangle les carrés ACRS, BAMN (on a donc
$\left(\overrightarrow{\text{AM}},\,\overrightarrow{\text{AB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\left(\overrightarrow{\text{AC}},\,\overrightarrow{\text{AS}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$), puis le parallélogramme MASD dont on notera le centre I. Faire une figure.
Le but de l'exercice est de montrer que la droite (AD) est une hauteur du triangle ABC et que AD = BC.
Pour cela, on utilisera deux méthodes.

1. **Méthode géométrique**

   On considère la rotation r de centre A, d' angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Quelles sont les images des points M et C par r ?

1. Japon, Hong-Kong, Singapour

b. On note S′ l'image de S par r. Montrer que A est le milieu de [CS′].

c. On note I′ l'image de I par r. Montrer que I′ est le milieu de [BS′].

d. En déduire que (AD) est perpendiculaire à (BC) et que AD = BC.

2. Utilisation des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct.

On désigne par a, b, c les affixes respectives des points A, B, C.

a. Calculer les affixes des points S et M en fonction de celles de A, B, C.

b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AD}}$ et celle du vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$.

c. Montrer que $\overrightarrow{\text{AD}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ sont orthogonaux et que AD = BC.

PROBLÈME **12 points**

La partie III est indépendante des parties I et II

Partie I

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\text{e}^{-x}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (0; r. n (unité graphique : 10 cm).

1. Étudier la dérivabilité de f en 0; que peut-on en conclure pour la courbe Γ ?

2. Montrer que pour $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}$. Étudier le sens de variations de f.

3. Étudier la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en conclure pour f ?

4. Tracer soigneusement la courbe Γ.

Partie II

Le but de cette partie est la résolution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0~;~+\infty[$.

1. On pose $g(x) = \ln x + 2x$.

a. Montrer que sur $]0~;~+\infty[$, les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes.

b. Étudier les variations de g et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0~;~+\infty[$ que l'on notera α. Montrer que α appartient à l'intervalle $[0,4\,;\,0,5]$.

2. En utilisant la courbe Γ donner une interprétation de α et en donner une valeur approchée.

3. a. Montrer que si $x \in [0,4~;~0,5]$ on a $f(x) \in [0,4~;~0,5]$.

b. Montrer que pour $x \in [0,4~;~0,5]$, on a $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{8}$.

On pourra montrer d'abord que $\left|f'(x)\right| = \left|\dfrac{2x-1}{2x}\right| f(x)$.

4. On définit la suite u par $u_0 = 0,4$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0,4~;~0,5]$.

b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{8}|u_n - \alpha|$.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\quad |u_n - \alpha| \leqslant 0,1 \times \dfrac{1}{8^n}$.

d. En déduire que la suite u est convergente et préciser sa limite.

5. En utilisant la relation établie au 4. c., à partir de quelle valeur n_0 de n est-on sûr que u_n représente une valeur approchée de α à 10^{-6} près ?
   Calculer u_{n_0} à l'aide de votre calculatrice.

Partie III

Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer F.

1. Préciser le sens de variation de F.
2. **a.** Montrer que pour $t \geqslant 0$ on a : $\sqrt{t} \leqslant t + \dfrac{1}{4}$.

   b. En déduire que $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\left(t + \frac{1}{4}\right)\,\mathrm{d}t$.

   c. Calculer $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\left(t + \frac{1}{4}\right)\,\mathrm{d}t$.

   d. En déduire que $F(x) \leqslant \dfrac{5}{4}$.