Baccalauréat ES Asie juin 1995

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On a relevé dans le T. E. F. (Tableaux de l'économie française) de l'année 1994 les prestations sociales concernant la santé reçues par les ménages, en France, au cours d'un certain nombre d'années.

Année	1988	1989	1990	1991	1992	1993
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Dépenses de santé y_i (en milliards de francs)	368	395	420	443	468	487

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique (on choisira des unités convenables de façon à utiliser au mieux toute la feuille de papier millimétré ; en particulier on mettra 300 à l'origine sur l'axe des ordonnées).

   (Les résultats numériques des questions 2 et 3 seront arrondis à 10^{-3} près.)
2. **a.** Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.

   b. Tracer cette droite de régression sur le graphique de la question 1.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de y en x.
4. D'après les résultats précédents, et en l'absence de contraintes nouvelles, quel aurait da être le montant approximatif, à 1 milliard de francs près, des prestations de santé, versé en 1994 ?

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

À la cafétéria, dans la vitrine pâtisserie,

— 60 % des gâteaux sont à base de crème ;

— parmi ceux qui sont à base de crème, 30 % ont aussi des fruits ;

— parmi les gâteaux qui n'ont pas de crème, 80 % ont des fruits.

On prend un gâteau au hasard.

1. **a.** Calculer la probabilité d'avoir un gâteau à base de crème et comportant des fruits.

   b. Calculer la probabilité d'avoir un gâteau avec des fruits mais sans crème.

   c. En déduire que la probabilité d'avoir un gâteau avec des fruits est égale à $0,50$.
2. **a.** Le gâteau pris au hasard comporte des fruits. Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème ?

   b. Le gâteau pris au hasard ne comporte pas de fruit. Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème ?

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + 4$ (a est un réel).

On pose $v_n = u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer le réel a pour que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ soit une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2. Dans la suite de l'exercice, on prend $a = \dfrac{1}{3}$.

   Calculer v_n en fonction de n.

   La suite (v_n) est-elle convergente ?

3. Déduire de la question précédente la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
4. **a.** Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.
   b. Étudier la convergence de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$.
   c. En déduire la limite de la somme $\sum_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME **4 points**

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \quad \text{où } a, b et c \text{désignent des nombres réels.}$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Calculer les réels a, b et c sachant que la courbe $\mathscr{C}$ possède les propriétés suivantes :
— $\mathscr{C}$ coupe l'axe (O,[) au point d/ordonnée 20.
— $\mathscr{C}$ passe par le point A(- 1 ; 18) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 3.

Partie B

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -x^3 - 3x^2 + 20.$$

1. Étudier les variations de g.
2. Calculer $g(2)$. Déduire de ce résultat et de l'étude des variations de g l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$, de l'inéquation : $g(x) > 0$.
3. Représenter graphiquement la fonction g sur $[-2 ; 2[$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   On prendra pour unités : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
   On notera $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de g.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-2 ; 1]$.

Partie C

Soit h la fonction numérique définie sur $]-\infty ; 2[$ par :

$$h(x) = \ln\left(-x^3 - 3x^2 + 20\right).$$

1. Utiliser des résultats de la partie B pour justifier que h est bien définie sur $]-\infty ; 2[$.
2. **a.** Déterminer les limites de h en $-\infty$ et en 2.
   b. Établir le tableau de variation de h.
3. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_2$ de h sur $[-2 ; 2[$ dans le repère précédent.
4. **a.** En utilisant le graphique, justifier que l'équation, $h(x) = 2$, a une solution unique α dans l'intervalle $[-2 ; 2[$.
   b. Démontrer que α est élément de l'intervalle $\left[1 ; \dfrac{7}{4}\right]$.
   c. Calculer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.
   d. L'équation $g(x) = \mathrm{e}^2$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$; laquelle?