Baccalauréat ES Asie juin 1996

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

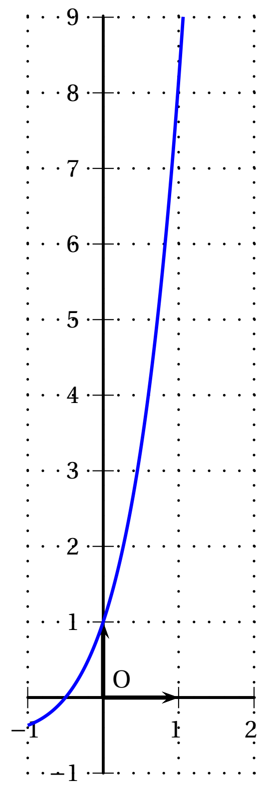
La question 4 *est indépendante des autres questions*

a et b étant deux réels, on considère la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x.$$

On note
- f la fonction dérivée de F sur $\mathbb{R}$ ($F' = f$),
- $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 1 cm,
- T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Le graphique ci-contre contient une partie de $\mathscr{C}$ et de T.



1. Exprimer $f(x)$ et $f'(x)$ à l'aide de a et b.
2. Lire sur le graphique $f(0)$ et $f'(0)$. En déduire les valeurs de a et de b.
3. Soit D le domaine limité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$, l'axe des abscisses, et la courbe $\mathscr{C}$. On note A l'aire de D, en cm^2. Calculer A.
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^x$.
   Justifier les informations contenues dans le tableau de variations suivant (valeurs, sens de variation et limites)

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-2\mathrm{e}^{-3/2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 1 **4 points**

Enseignement obligatoire

On dispose de deux dés cubiques.Toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître.
Le 1er cube a cinq faces rouges et une face verte. Le 2e cube a une face rouge, deux vertes et trois bleues.

1. On jette les deux dés. On regarde la couleur des faces supérieures de chaque dé. On note :

   A l'évènement « les deux faces sont rouges ».

   B l'évènement « les deux faces sont de la même couleur ».

   C l'évènement « l'une des faces est rouge et l'autre verte ».

   D l'évènement « les deux faces sont de couleurs différentes ».

Expliquer pourquoi $p(A) = \dfrac{5}{36}$ et $p(C) = \dfrac{11}{36}$.
Calculer $p(B)$ et $p(D)$.
À chaque jet de ces deux dés est associé un jeu qui permet :

- un gain de 5 F si les deux faces sont rouges,
- un gain de 2 F si les deux faces sont vertes,
- une perte si les deux faces sont de couleurs différentes. On note x le montant en francs de cette perte.

On définit ainsi une variable aléatoire X qui, à chaque jet des deux dés, associe le gain, ou la perte ainsi réalisé.
Déterminer $p(X = 5)$, $p(X = 2)$, $p(X = -x)$.
On note $\text{E}(X)$ l'espérance mathématique de X. Un tel jeu est dit « équitable » lorsque $\text{E}(X) = 0$.
Déterminer la valeur de x correspondante.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 8 - 8\ln x.$$

Étudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$(x) = x - 1 + 8\frac{\ln x}{x}.$$

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
3. Étudier le sens de variation et dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que la représentation graphique C de f admet une asymptote oblique D, d'équation $y = x - 1$.
   Déterminer la position relative de C et D.
5. Construire C et D dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe de ordonnées).
6. Déterminer les coordonnées du point B de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x - 1$.
   Donner une équation de cette tangente et la tracer.
7. Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par
   $$h(x) = (\ln x)^2.$$
   a. Calculer la dérivée h' de h.
   b. En déduire une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
8. Calculer en cm^2,l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   En donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.