Baccalauréat ES Asie juin 1997

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne l'évolution des obligations (capitalisation en fin d'anée en milliards de francs) en France de 1980 à 1986.

Années	1980	1981	1982	1983	19874	1985	1986
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Montant des obligations y_i	567,3	580,5	778,9	1 032,9	1 296,7	1 598,1	1 870,6

La Bourse : temple de la spéculation au marché financier ; B.Bellante - juillet 1989

1. On envisage un ajustement exponentiel de y en x : on pose donc $Y_i = \ln y_i$. Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant (les valeurs de Y_i seront arrondies à $0,01$ près par défaut).

x_i	1	2	3	4	5	6	7
Y_i	6,34						

   Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série $((x_i\ ;\ Y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités : 2 cm pour unité en abscisse (origine 1979) ; 10 cm pour une unité en ordonnée (origine 6).

   Donner le coefficient de corrélation de la série $((x_i\ ;\ Y_i)$ à $0,01$ près par défaut.

   (Le détail des calculs n'est pas demandé).

   En déduire que, pour cette série, un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est satisfaisant.

   Donner alors une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax + b$ (a et b donnés à $0,01$ près par défaut), aucune justification n'est demandée.

   Tracer cette droite.

2. En utilisant la droite de régression trouvée à la question précédente, avec les valeurs approchées de a et b, et l'égalité $Y = \ln y$, donner les valeurs estimées de Y_i, puis de y_i pour les années 1986 et 1987 (valeurs données à $0,01$ près par défaut).

   Placer ces deux nouveaux points$\left(x_i\ ;\ \text{valeur estimée de } y_i\right)$ correspondant aux années 1986 et 1987 dans le repère précédent.

3. On remarque que cette estimation est bonne pour 1986 mais l'année 1987 a connu un krach boursier et le montant réel des obligations en 1987 a été de 1 941,6 milliards de francs,.

   À quelle erreur (en pourcentage de la valeur réelle) l'estimation conduit-elle ? Le résultat sera donné au centième près par défaut.

Exercice 2

Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit.
Sa capacité maximale de production est de 20 tonnes. La courbe C ci-jointe représente le coût de production $C(x)$, exprimé en milliers de francs, en fonction du nombre x de tonnes produites.

1. Après une étude de marché, l'entreprise espère vendre son produit 84 milliers de francs la tonne.

   a. Déterminer, en fonction du nombre x de tonnes produites, la recette $R(x)$ en milliers de francs espérée par cette entreprise.

   b. Tracer la représentation graphique Δ de la fonction R sur le graphique ci-dessous, pour $x \in [0\ ;\ 20]$.

   Déterminer graphiquement à quel intervalle doit appartenir x pour assurer un bénéfice à l'entreprise.

c. Déterminer graphiquement, à une tonne près, le nombre de tonnes à produire pour assurer un bénéfice maximum.

2. On considère maintenant que

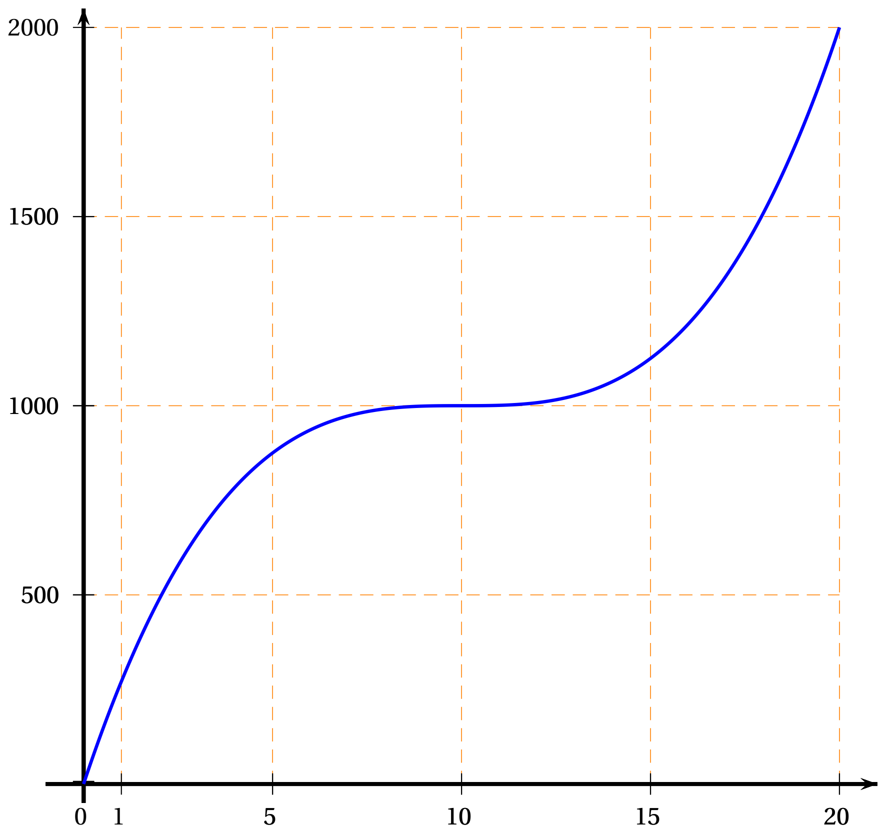
$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x \quad \text{avec } x > 0.$$

Pour affaiblir la concurrence, l'entreprise décide de vendre son produit le moins cher possible sans perdre d'argent.

Soit $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ le coût moyen de fabrication.

a. Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x.
Étudier les variations de $C_m(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.

b. En déduire la valeur x_m qui assure un coût moyen minimum. Quel est alors le prix d'une tonne ?



Problème

Le but de ce problème est l'étude d'une fonction, le tracé de sa représentation graphique et le calcul d'une aire liée à cette représentation.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = -1 + (1 - x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Calculer $g'(x)$. étudier son signe.

b. Démontrer que la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 1.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g. On précisera $g(0)$.

d. Démontrer que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $g(x) < 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\text{e}^{-x} - x + 4.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Unité : 2 cm.

a. Vérifier que, pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

b. étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$; préciser la limite en $+\infty$.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

d. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et préciser la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.

3. **a.** Soit h la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = -\frac{x}{2} + 4.$$

Tracer sa représentation graphique D dans le même repère que $\mathscr{C}$.

b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.

c. étudier le signe de $f(x) - h(x)$ sur $[0~;~+\infty[$ et en déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et D.

4. **a.** Soit G la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$G(x) = (-x - 1)\text{e}^{-x}$$

.
Calculer $G'(x)$.

b. En déduire une primitive de la fonction qui à x associe $x\text{e}^{-x} - \dfrac{x}{2}$, sur $[0~;~+\infty[$.

c. Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 2$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.